



Das Wave-of-Advance-Modell

1 Die Ausbreitungswelle nach Fisher und Skellam

Wenn wir die zeitliche Veränderung irgendeiner beweglichen Größe im Raum beschreiben, so bewegen wir uns im allgemeinen mit dem beobachteten Element mit. Uns interessiert hier die Entwicklung an einem Ort, also die partielle Ableitung nach der Zeit. Damit sind automatisch alle zu betrachtenden Parameter ortsfeste, nur lokal gültige Größen.

1.1 Die Fisher-Skellam-Formel für die lokale Bevölkerungsdichte

$$\frac{\partial n}{\partial t} = ?$$

Anschaulich steht n für die Anzahl Menschen in einem Teilgebiet, z. B. einer Siedlung. Mathematisch steht n für eine Dichte in [Personen/km²].

1.1.1 Das autochthone Wachstum

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

Dabei sind:

- n Bevölkerungsdichte [Personen/km²]
- α Anfangswachstum [%/a]
- N Tragfähigkeit¹ [Personen/km²]

1.1.2 Das Wachstum durch Zuwanderung

$$\begin{aligned} \vec{J} &= -D \frac{dn}{d\vec{r}} = -D \vec{\nabla} n & (1) \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= \vec{\nabla} (D \vec{\nabla} n) = D \vec{\nabla}^2 n & (2) \\ \vec{\nabla}^2 &= \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \\ &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \approx \frac{d^2}{dr^2} \\ D &= \frac{m^2}{2d(1a)} = \frac{\mu^2}{2d\tau} & (3) \\ \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{\mu^2}{4\tau} \cdot \frac{d^2 n}{dr^2} \end{aligned}$$

¹ In dieser Darstellung ist N eine Konstante. Notwendig ist nur, daß sich N z. B. infolge landwirtschaftlicher Fortschritte wesentlich langsamer ändert als n und wir diese Veränderung über die hier betrachteten kurzen Zeiträume vernachlässigen können.

Dabei sind:

- \vec{J} Nettostrom [1/km a]
- D Diffusionskoeffizient in [km²/a]
- d Zahl der Dimensionen [2]
- m Migration pro Jahr [km]
- μ Migration pro Generation [km]
- τ Dauer einer Generation [a]

1.1.3 Die Fisher-Skellam-Formel

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) + \frac{\mu^2}{4\tau} \cdot \frac{d^2 n}{dr^2} \quad (4)$$

Eine Voraussetzung für ihre Anwendbarkeit ist ein hinreichend großes Wachstum α . Im Grenzfall $\alpha = 0$ würde sich auch eine sehr kleine Bevölkerung gleichmäßig auf einer beliebig großen Fläche verteilen, wobei alle sozialen und Heiratsnetzwerke zusammenbrächen.

1.2 Die Ausbildung der Welle

$$v \geq 2\sqrt{D\alpha} = 2\sqrt{\frac{\mu^2 \alpha}{4\tau}} = \mu \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}} \quad (5)$$

1.2.1 Die zeitverzögerte Lösung

$$\vec{J}(\vec{r}, t + \tau) = -D \vec{\nabla} n(\vec{r}, t) \quad (6)$$

$$v = \frac{2\sqrt{D\alpha}}{1 + 1/2 \alpha \tau} = \frac{\mu \sqrt{\alpha/\tau}}{1 + 1/2 \alpha \tau} \quad (7)$$

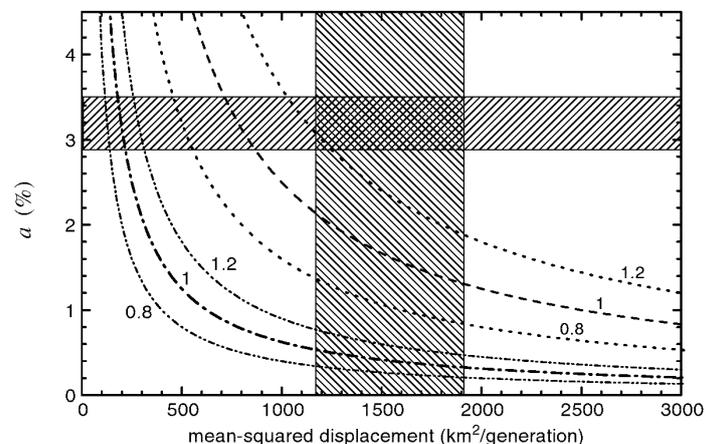


Abbildung 1: Parametervariation der Ausbreitungsgeschwindigkeit für eine Generationsdauer von $\tau = 25a$. Hervorgehoben sind die ethnographisch wahrscheinlichsten Bereiche für α und μ^2 [Fo02]. Die untere Kurvenschar ist mit der falschen Gleichsetzung von $D = \mu^2/\tau$ in [Am84] berechnet.

Autor	α [%/a]	τ [a]	μ [km]	Proxy zur Bestimmung von μ
Pinhasi 2005	2.9–3.5	29–35	30–47	Entfernung vom Geburtsort zu dem eines Elternteils
Ammerman 1984	0.6–3.0	25	17–45	Geburtsorte von Mann und Frau oder Wohnort als Erwachsener und Geburtsort
Rendine 1986	1.6	25	31	wie Pinhasi 2005
Fort 2002	2.9–3.5	25–28	34–44	Mittel aus Ammerman 1984 und Pinhasi 2005

Tabelle 1: Spannbreiten der ethnographisch erschließbaren Parameter.

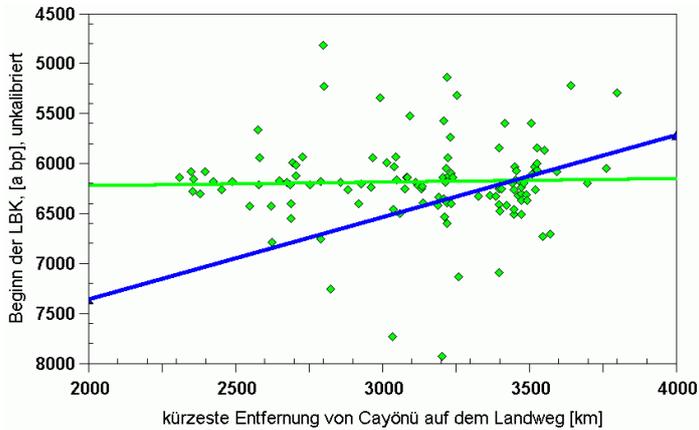


Abbildung 2: Verteilung der 118 Daten zur Linearbandkeramik aus [Pi05]. Die dunkle Gerade entspricht der globalen Regression über alle Daten der Arbeit. Zwingt man den Daten trotz der Streuung eine Regressionsgerade auf, so entspricht deren Steigung einer Geschwindigkeit von mindestens 700 km/a.

1.3 Die quantitative Anwendung des Modells

Die Werte für α bei [Fo02] und [Pi05] sind von der Besiedlung von Pitcairn 1790–1856 und den Bass-Straßen-Inseln 1820–1945 durch Europäer abgeleitet. Nach Abbildung 1 könnte neben der zeitverzögerten Lösung auch Gleichung (5) mit einem $\alpha \approx 2\%/a$ die beobachtete Geschwindigkeit erklären.

2 Sonderfall der Linearbandkeramik

Die Linearbandkeramik scheint in den Fehlergrenzen der Datierungen in fast ihrem gesamten Verbreitungsgebiet genau gleichzeitig aufgetreten zu sein. Eine zeitliche Staffelung von Südosten nach Nordwesten ist nicht erkennbar.

2.1 Résumé

Als lokales Modell kann die Wave of Advance ein Voranschreiten mit Sprüngen und Hiaten nicht erklären. Sie enthält in ihren Parametern keinerlei Fernwirkung und auch wenn die mittlere Geschwindigkeit über lange Zeiten und große Räume ihrer Voraussage entspricht, wird ein solches Voranschreiten von ihr *nicht* zutreffend beschrieben.

Literatur

- Am71** A. J. Ammerman & L. L. Cavalli-Sforza, *Measuring the Rate of Spread of Early Farming in Europe*. *Man* **6** (1971), 674–688.
- Am73** A. J. Ammerman & L. L. Cavalli-Sforza, *A population model for the diffusion of early farming in Europe*. In: Colin Renfrew (Hrsg.), *The explanation of culture change: models in prehistory, Proceedings of a meeting of the Research Seminar in Archaeology and Related Subjects held at the University of Sheffield*. (Pittsburgh 1973), 343–357.
- Am84** Albert J. Ammerman & L. L. Cavalli-Sforza, *The Neolithic Transition and the Genetics of Populations in Europe*. (Princeton 1984).
- Fi37** R. A. Fisher, *The Wave of Advance of Advantageous Genes*. *Annals of Eugenics* **7** (1937), 355–369.
- Fo02** Joaquim Fort & Vicenç Méndez, *Wavefronts in time-delayed reaction-diffusion systems. Theory and comparison to experiment*. *Reports on Progress in Physics* **65** (2002), 895–954.
- Ke48** David G. Kendall, *A form of wave propagation associated with the equation of heat conduction*. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **44** (1948), 591–594.
- Pi05** Ron Pinhasi, Joaquim Fort & Albert J. Ammerman, *Tracing the Origin and Spread of Agriculture in Europe*. *PLoS Biology* **3** (2005) xii, e410, 2220–2228. <<http://dx.doi.org/10.1371/journal.pbio.0030410>>.
- Sk51** J. G. Skellam, *Random Dispersal in Theoretical Populations*. *Biometrika* **38** (1951), 196–218.



Die Präsentation, Literatur und eine ausführlichere Hausarbeit liegen auf: axel.berger-odenthal.de/work/Referat/