



Das Wave-of-Advance-Modell

Axel Berger

Institut für Ur- und Frühgeschichte
Universität zu Köln

Seminar: Die Neolithisierung im Mittelmeerraum
Wintersemester 2013/14

Dr. Silviane Scharl, Dr. Jörg Linstädter, Dr. Lee Clare





Gliederung

- 1 Die Fisher-Skellam-Formel für die lokale Bevölkerungsdichte
- 2 Die Ausbildung der Welle
- 3 Nichtanwendbarkeit für die Linearbandkeramik
- 4 Résumé



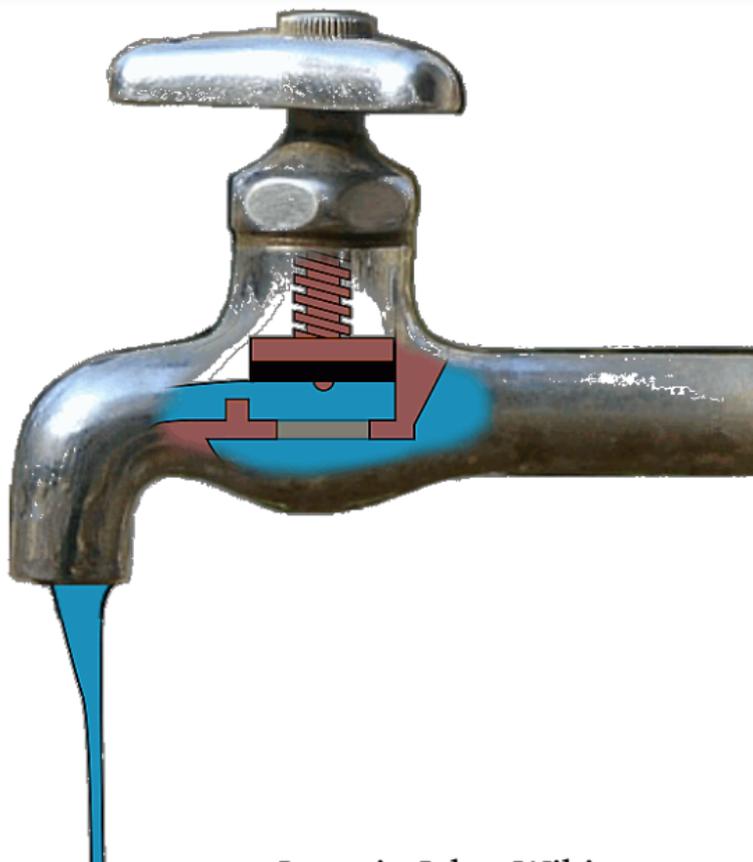
Partielles und totales Differential

$$p = p(\vec{x}, t)$$

$$\frac{dp}{dt} \neq 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial \vec{x}} \frac{d\vec{x}}{dt}$$





Das autochthone Wachstum

logistische Wachstumskurve

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad (1)$$

Definitionen

n : Bevölkerungsdichte [Personen/km²]



Das autochthone Wachstum

logistische Wachstumskurve

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad (1)$$

Definitionen

n : Bevölkerungsdichte [Personen/km²]

α : max. Bevölkerungswachstum [%/a]



Das autochthone Wachstum

logistische Wachstumskurve

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) \quad (1)$$

Definitionen

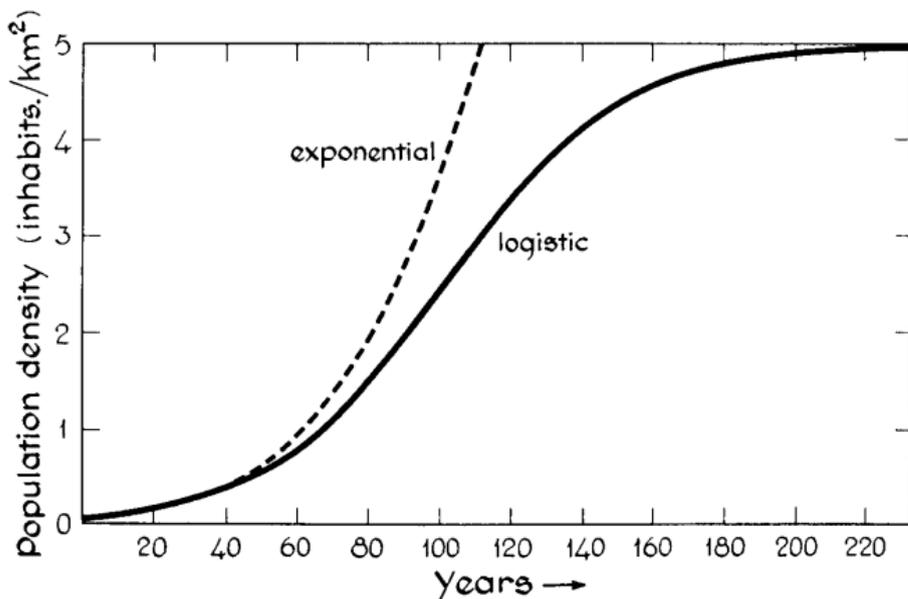
n : Bevölkerungsdichte [Personen/km²]

α : max. Bevölkerungswachstum [%/a]

N : Tragfähigkeit [Personen/km²]



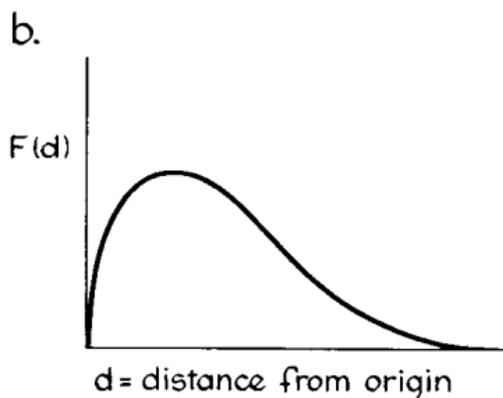
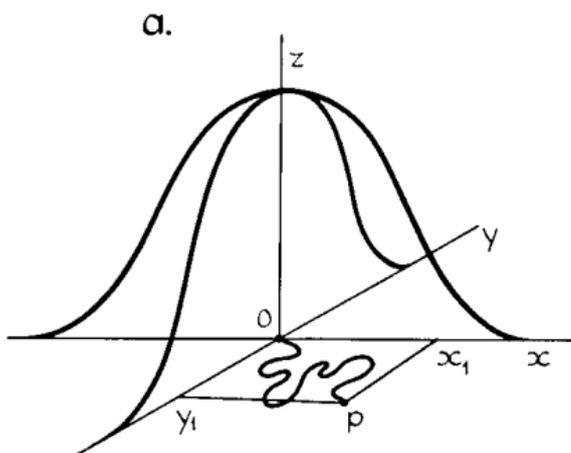
Das logistische Wachstum



Vergleich von
exponentiellem
und logistischem
Wachstum bei einer
Anfangssteigung von
3.9%/a



Die Zufallsbewegung



Verteilung der Zielpunkte und Entfernungen der Migration nach einem Zeitschritt bei rein zufälliger Diffusionsbewegung

$$\bar{d}^2 \sim t, \quad \bar{d} \sim \sqrt{t}$$



Das Wachstum durch Zuwanderung

Die Diffusionsbewegung

$$\vec{J} = -D \frac{dn}{d\vec{r}} = -D \vec{\nabla} n \quad (2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \vec{\nabla} (D \vec{\nabla} n) = D \vec{\nabla}^2 n \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 &= \frac{d^2}{dx^2} + \cancel{\frac{d^2}{dy^2}} \\ &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \cancel{\frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2}} \simeq \frac{d^2}{dr^2} \end{aligned}$$

Definitionen

\vec{J} : Nettostrom [$1/\text{km a}$]

D : Diffusionskoeffizient [km^2/a]



Das Wachstum durch Zuwanderung

Die Diffusionsbewegung

$$\vec{J} = -D \frac{dn}{d\vec{r}} = -D \vec{\nabla} n \quad (2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \vec{\nabla} (D \vec{\nabla} n) = D \vec{\nabla}^2 n \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 &= \frac{d^2}{dx^2} + \cancel{\frac{d^2}{dy^2}} \\ &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \cancel{\frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2}} \simeq \frac{d^2}{dr^2} \end{aligned}$$

Definitionen

\vec{J} : Nettostrom [$1/\text{km a}$]

D : Diffusionskoeffizient [km^2/a]



Das Wachstum durch Zuwanderung

Die Diffusionsbewegung

$$\vec{J} = -D \frac{dn}{d\vec{r}} = -D \vec{\nabla} n \quad (2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \vec{\nabla} (D \vec{\nabla} n) = D \vec{\nabla}^2 n \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 &= \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \\ &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \simeq \frac{d^2}{dr^2} \end{aligned}$$

Definitionen

\vec{J} : Nettostrom [$1/\text{km a}$]

D : Diffusionskoeffizient [km^2/a]



Das Wachstum durch Zuwanderung

Die Diffusionsbewegung

$$\vec{J} = -D \frac{dn}{d\vec{r}} = -D \vec{\nabla} n \quad (2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \vec{\nabla} (D \vec{\nabla} n) = D \vec{\nabla}^2 n \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 &= \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \\ &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \approx \frac{d^2}{dr^2} \end{aligned}$$

Definitionen

\vec{J} : Nettostrom [$1/\text{km a}$]

D : Diffusionskoeffizient [km^2/a]



Das Wachstum durch Zuwanderung

Die Zuwanderung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \vec{\nabla}^2 n = D \frac{d^2 n}{dr^2}$$

$$D = \frac{m^2}{2d(1a)} = \frac{\mu^2}{2d\tau}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\mu^2}{4\tau} \cdot \frac{d^2 n}{dr^2}$$

Definitionen



Das Wachstum durch Zuwanderung

Die Zuwanderung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \vec{\nabla}^2 n = D \frac{d^2 n}{dr^2}$$

$$D = \frac{m^2}{2d(1a)} = \frac{\mu^2}{2d\tau}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\mu^2}{4\tau} \cdot \frac{d^2 n}{dr^2}$$

Definitionen

d : Zahl der Dimensionen [2]

m : Migration pro Jahr [km]



Das Wachstum durch Zuwanderung

Die Zuwanderung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \vec{\nabla}^2 n = D \frac{d^2 n}{dr^2}$$

$$D = \frac{m^2}{2d(1a)} = \frac{\mu^2}{2d\tau}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\mu^2}{4\tau} \cdot \frac{d^2 n}{dr^2}$$

Definitionen

d : Zahl der Dimensionen [2]

μ : Migration pro Generation [km]

m : Migration pro Jahr [km]

τ : Dauer einer Generation [a]



Das Wachstum durch Zuwanderung

Die Zuwanderung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \vec{\nabla}^2 n = D \frac{d^2 n}{dr^2}$$

$$D = \frac{m^2}{2d(1a)} = \frac{\mu^2}{2d\tau}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\mu^2}{4\tau} \cdot \frac{d^2 n}{dr^2}$$

Definitionen

d : Zahl der Dimensionen [2]

μ : Migration pro Generation [km]

m : Migration pro Jahr [km]

τ : Dauer einer Generation [a]



Die Fisher-Skellam-Gleichung

Die komplette Gleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) + D \cdot \frac{d^2 n}{dr^2}$$
$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) + \frac{\mu^2}{4\tau} \cdot \frac{d^2 n}{dr^2} \quad (4)$$

Definitionen

α : max. Bevölkerungswachstum [%/a]

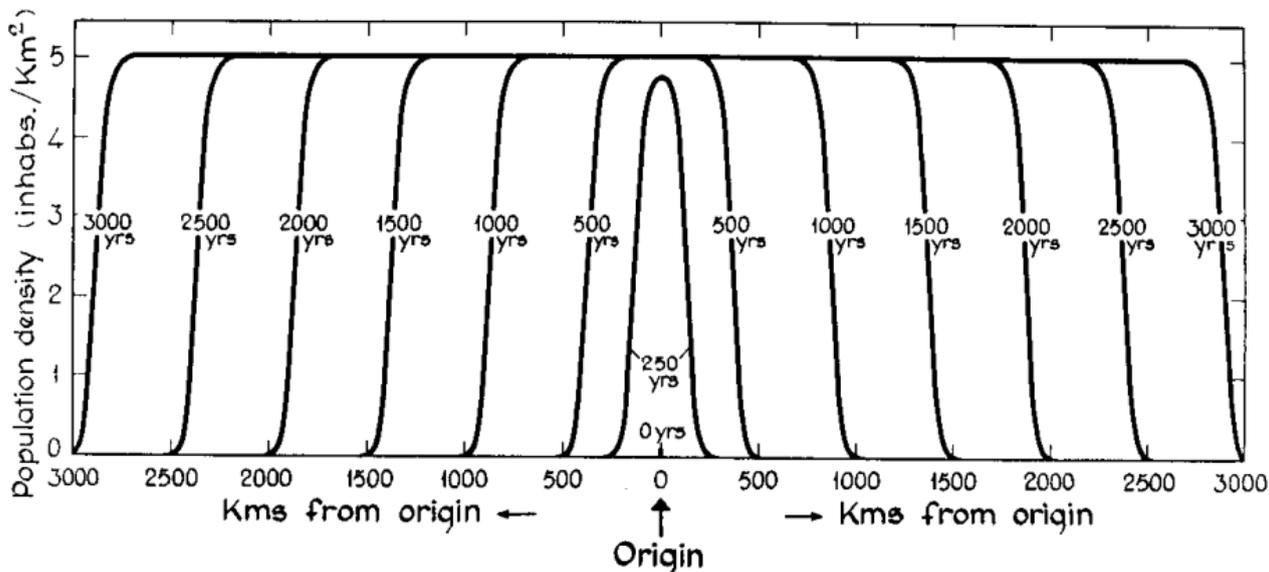
μ : Migration pro Generation [km]

N : Tragfähigkeit [Personen/km²]

τ : Dauer einer Generation [a]



Die Ausbreitungswelle



Die Ausbreitung einer logistisch wachsenden Bevölkerung von einem Zentrum aus



Die Ausbildung der Welle

Die Fisher-Skellam-Gleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) + \frac{\mu^2}{4\tau} \cdot \frac{d^2 n}{dr^2}$$

Die Geschwindigkeit der Welle

Definitionen

α : max. Bevölkerungswachstum [%/a]

μ : Migration pro Generation [km]

N : Tragfähigkeit [Personen/km²]

τ : Dauer einer Generation [a]



Die Ausbildung der Welle

Die Fisher-Skellam-Gleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) + \frac{\mu^2}{4\tau} \cdot \frac{d^2 n}{dr^2}$$

Die Geschwindigkeit der Welle

$$v \geq 2\sqrt{D\alpha} = 2\sqrt{\frac{\mu^2\alpha}{4\tau}} = \mu\sqrt{\frac{\alpha}{\tau}} \quad (5)$$

Definitionen

α : max. Bevölkerungswachstum [%/a]

μ : Migration pro Generation [km]

N : Tragfähigkeit [Personen/km²]

τ : Dauer einer Generation [a]



Die Ausbildung der Welle

Die Fisher-Skellam-Gleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) + \frac{\mu^2}{4\tau} \cdot \frac{d^2 n}{dr^2}$$

Die Geschwindigkeit der Welle

$$v \geq 2\sqrt{D\alpha} = 2\sqrt{\frac{\mu^2\alpha}{4\tau}} = \mu\sqrt{\frac{\alpha}{\tau}} \quad (5)$$

Definitionen

α : max. Bevölkerungswachstum [%/a]

μ : Migration pro Generation [km]

N : Tragfähigkeit [Personen/km²]

τ : Dauer einer Generation [a]



Die Ausbildung der Welle

Die Fisher-Skellam-Gleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \alpha n \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right) + \frac{\mu^2}{4\tau} \cdot \frac{d^2 n}{dr^2}$$

Die Geschwindigkeit der Welle

$$v \geq 2\sqrt{D\alpha} = 2\sqrt{\frac{\mu^2\alpha}{4\tau}} = \mu\sqrt{\frac{\alpha}{\tau}} \quad (5)$$

Definitionen

α : max. Bevölkerungswachstum [%/a]

μ : Migration pro Generation [km]

N : Tragfähigkeit [Personen/km²]

τ : Dauer einer Generation [a]



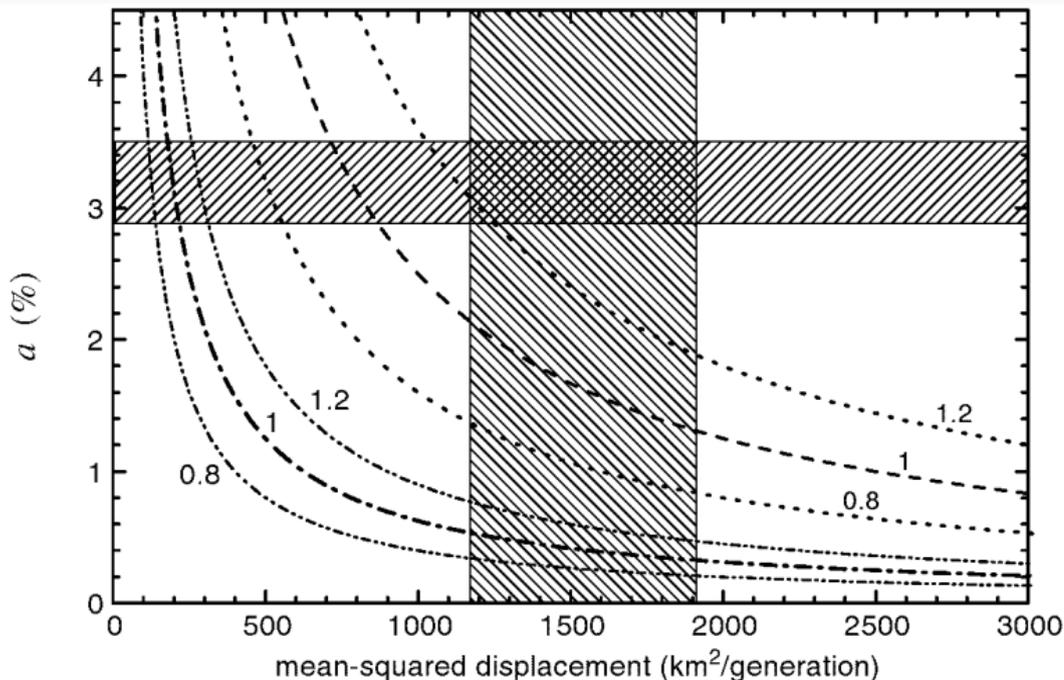
Die Werte der Parameter

Autor	α [%/a]	τ [a]	μ [km]	Proxy zur Bestimmung von μ
Pinhasi 2005	2.9–3.5	29–35	30–47	Entfernung vom Geburtsort zu dem eines Elternteils
Ammerman 1984	0.6–3.0	25	17–45	Geburtsorte von Mann und Frau oder Wohnort als Erwachsener und Geburtsort
Rendine 1986	1.6	25	31	wie Pinhasi 2005
Fort 2002	2.9–3.5	25–28	34–44	Mittel aus Ammerman 1984 und Pinhasi 2005

Spannbreiten der von verschiedenen Autoren verwendeten Werte der ethnographisch erschließbaren Parameter.



Die quantitative Anwendung des Modells



Parametervariation der Ausbreitungsgeschwindigkeit für eine Generationsdauer von $\tau = 25a$. Hervorgehoben sind die ethnographisch wahrscheinlichsten Bereiche für α und μ^2 . Die untere Kurvenschar ist mit der falschen Gleichsetzung von $D = \mu^2/\tau$ in Am84 berechnet.



Eine Bestätigung des Modells

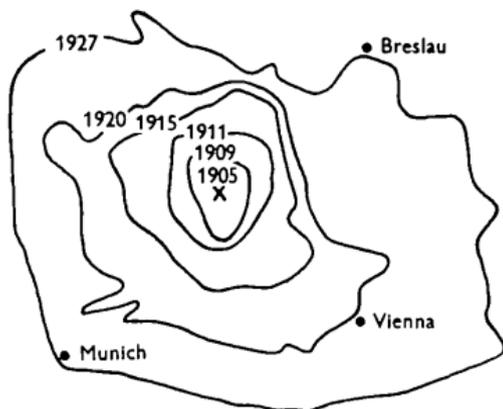


Fig. 1

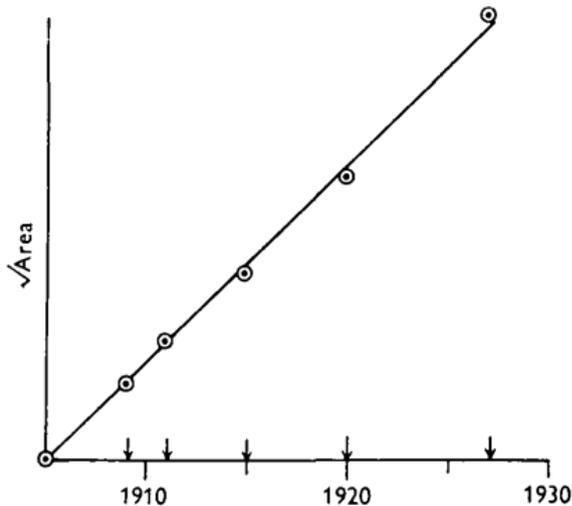
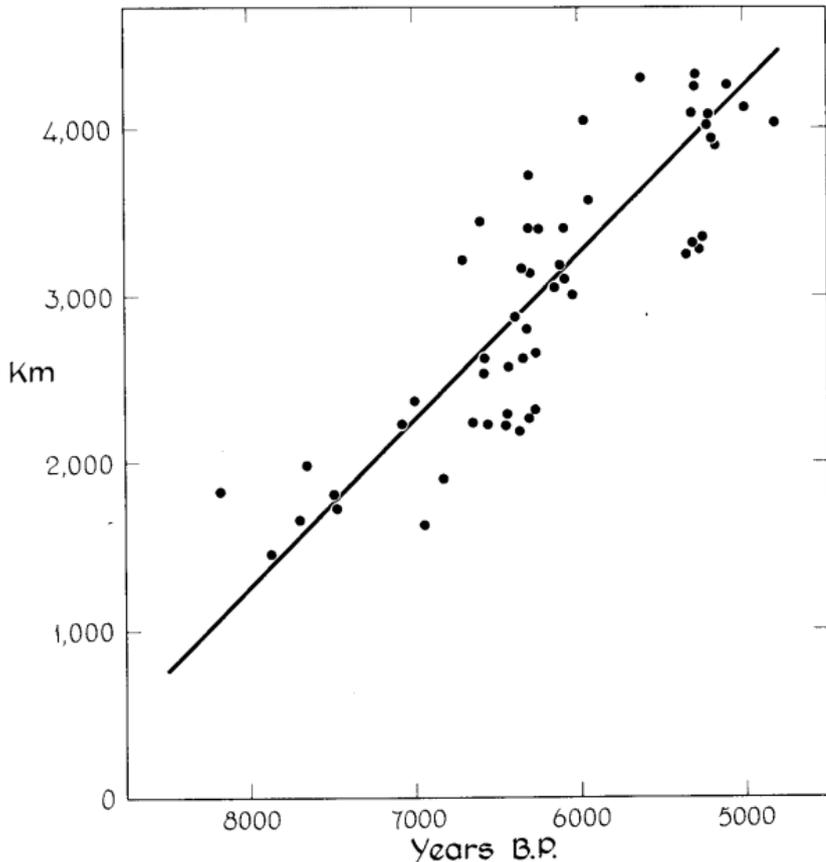


Fig. 2

Die Ausbreitung der Bisamratte von einem Zentrum in Böhmen



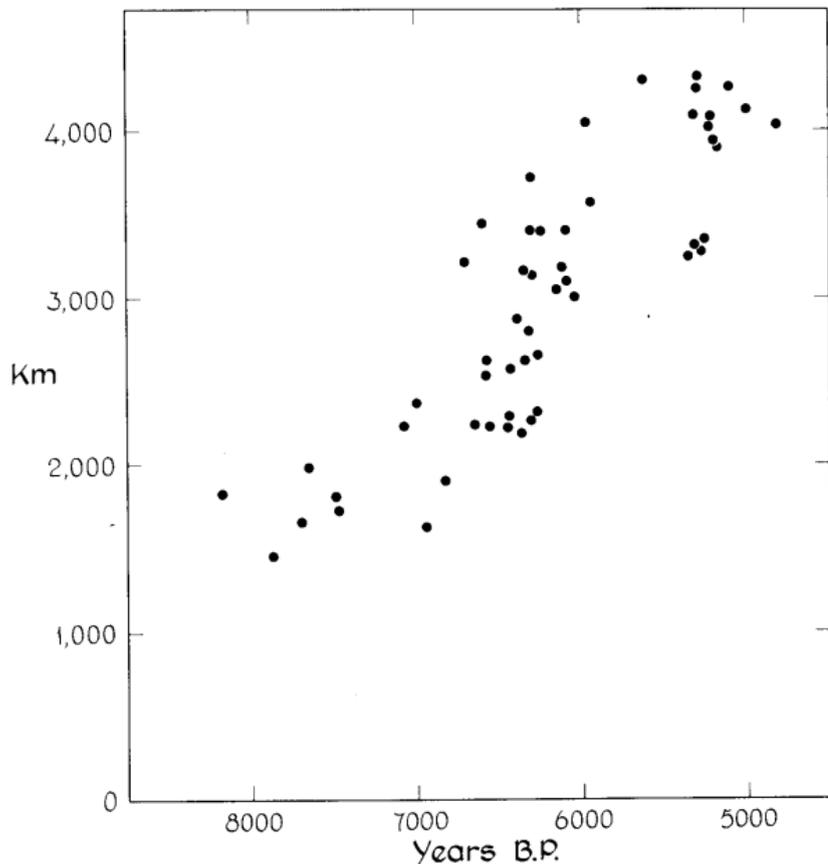
Das Neolithikum nach Ammerman 1971, 1973 und 1984



Ausbreitungsdaten aus Ammerman 1973 ohne Regressionsgerade und mit Hervorhebung der Linearbandkeramik [Am84].



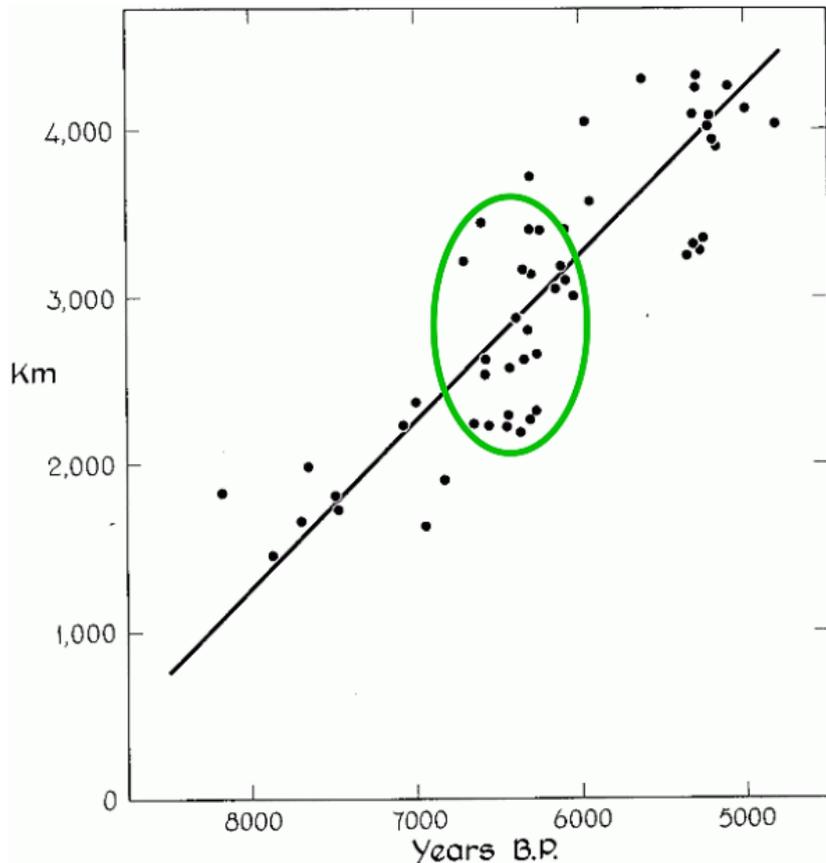
Das Neolithikum nach Ammerman 1971, 1973 und 1984



Ausbreitungsdaten aus Ammerman 1973 ohne Regressionsgerade und mit Hervorhebung der Linearbandkeramik [Am84].



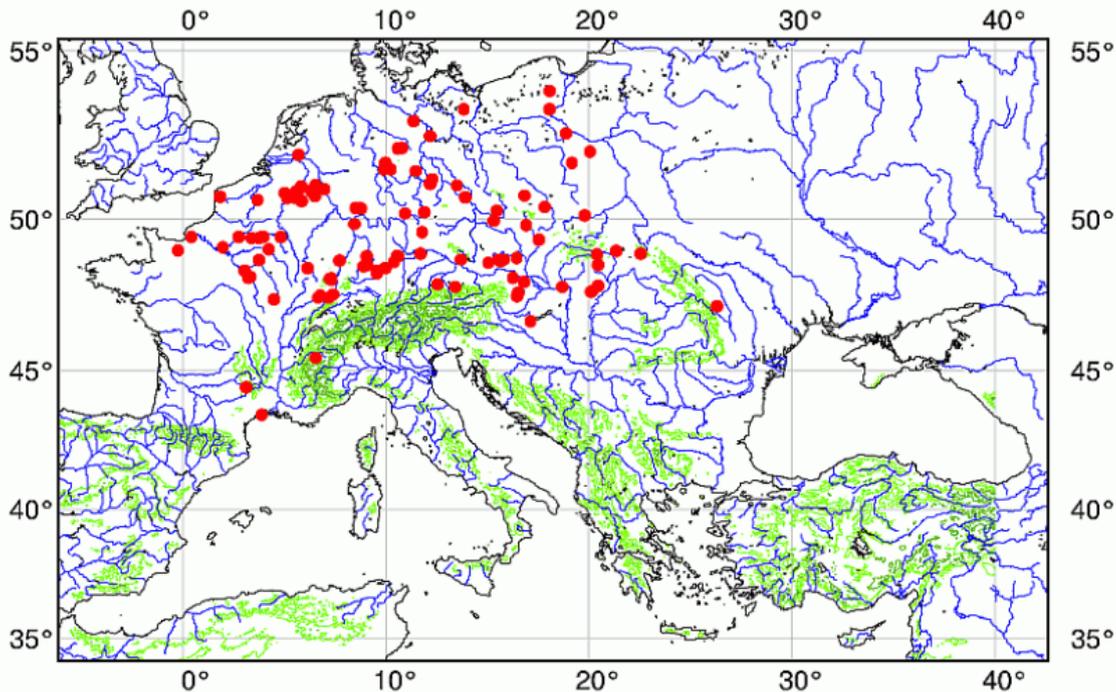
Das Neolithikum nach Ammerman 1971, 1973 und 1984



Ausbreitungsdaten aus Ammerman 1973 ohne Regressionsgerade und mit Hervorhebung der Linearbandkeramik [Am84].



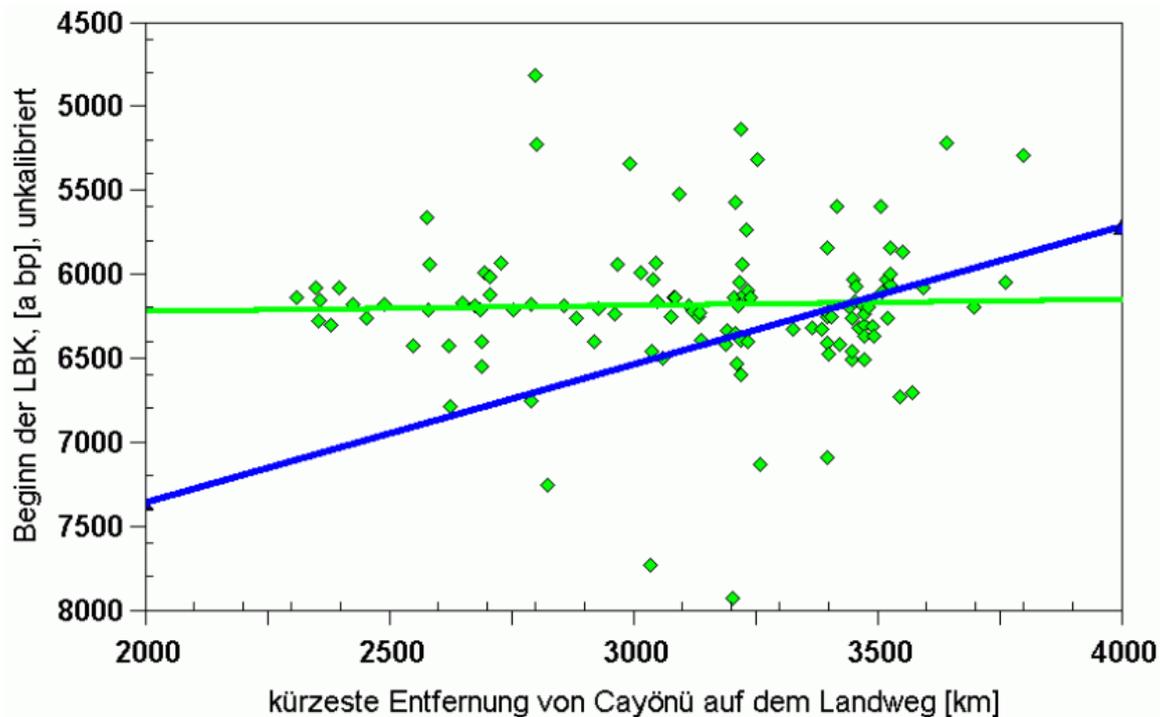
Lage der 118 Daten zur Linearbandkeramik



Lage der 118 von Pinhasi der Linearbandkeramik zugeordneten Siedlungen



Verteilung der 118 Daten zur Linearbandkeramik



Verteilung der 118 Daten zur Linearbandkeramik aus Pinhasi 2005. Die blaue Gerade entspricht der Regression über alle 765 Daten für das Neolithikum.



Résumé

Das Wave-of-Advance-Modell enthält ausschließlich lokale Vorgänge ohne jede Fernwirkung und ist außerstande Sprünge und Hiaten zu erklären. Für die Modellierung menschlicher und kultureller Ausbreitungen ist es damit ungeeignet.



Hausarbeit und Literatur

Vielen Dank

Das Handout, die Literatur und eine ausführlichere
Hausarbeit zum Thema liegen auf:

www.axel.berger-odenthal.de/work/Referat/



Literatur

- Am71 A. J. Ammerman & L. L. Cavalli-Sforza,
Measuring the Rate of Spread of Early Farming in Europe.
Man 6 (1971), 674–688.
- Am73 A. J. Ammermann & L. L. Cavalli-Sforza,
A population model for the diffusion of early farming in Europe.
In: Colin Renfrew (Hrsg.),
The explanation of culture change: models in prehistory, Proceedings of a meeting of the Research Seminar in Archaeology and Related Subjects held at the University of Sheffield.
(Pittsburgh 1973), 343–357.
- Am84 Albert J. Ammerman & L. L. Cavalli-Sforza,
The Neolithic Transition and the Genetics of Populations in Europe.
(Princeton 1984).
- Fi37 R. A. Fisher,
The Wave of Advance of Advantageous Genes.
Annals of Eugenics 7 (1937), 355–369.
- Fo02 Joaquim Fort & Vicenç Méndez,
Wavefronts in time-delayed reaction-diffusion systems. Theory and comparison to experiment.
Reports on Progress in Physics 65 (2002), 895–954.
- Ke48 David G. Kendall,
A form of wave propagation associated with the equation of heat conduction.
Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 44 (1948), 591–594.
- Pi05 Ron Pinhasi, Joaquim Fort & Albert J. Ammerman,
Tracing the Origin and Spread of Agriculture in Europe.
PLoS Biology 3 (2005) xii, e410, 2220–2228.
<<http://dx.doi.org/10.1371/journal.pbio.0030410>>.
- Sk51 J. G. Skellam,
Random Dispersal in Theoretical Populations.
Biometrika 38 (1951), 196–218.