

# 1. Herleitung des verwendeten Gleichungssystems

## 1.1. Die Transportgleichung für Photonen

Ausgangspunkt jeder Flußberechnung ist die von BOLTZMANN 1893 ursprünglich für die kinetische Gastheorie aufgestellte Transportgleichung. Sie soll im Folgenden in Anlehnung an ZIEGLER /Zi 83/ für Photonen entwickelt werden. Es ist zunächst notwendig diese nach Ort, Energie und Richtung zu sortieren. Sei

$$n(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) \underline{dr} \underline{dE} \underline{d\Omega}$$

die Anzahl aller Photonen, die im Volumen  $\underline{dr}$  um  $\underline{r}$  mit einer Energie zwischen  $E$  und  $E+dE$  in das Raumwinkelement  $\underline{d\Omega}$  um die Richtung  $\underline{\Omega}$  fliegen. Für sie gilt die Bilanz:

$$(1.1) \quad \frac{\delta}{\delta t} n(\underline{r}, E, \underline{\Omega}, t) \underline{dr} \underline{dE} \underline{d\Omega} = \text{Gewinne} - \text{Verluste}$$

### 1.1.1. Gewinne

#### - Quellen

Hierunter sei die spontane Emission durch  $\gamma$ -Strahler verstanden. Wir können sie o.B.d.A. schon jetzt als isotrop und zeitlich konstant ansehen.

$$s(\underline{r}, E, \underline{\Omega}, t) \underline{dr} \underline{dE} \underline{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} s(\underline{r}, E) \underline{dr} \underline{dE} \underline{d\Omega}$$

#### - Zustreuung

Sei mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$

$$\mathcal{Y}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}, t) := c \cdot n(\underline{r}, E, \underline{\Omega}, t)$$

der Photonenfluß und

$$\Sigma_s(\underline{r}, E' \rightarrow E, \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega})$$

der makroskopische Streuquerschnitt für eine Streuung von der Energie  $E'$  auf  $E$  und aus der Richtung  $\underline{\Omega}'$  nach  $\underline{\Omega}$ , so erhalten wir für die Zustreuung

$$\underline{dr} \underline{dE} \underline{d\Omega} \int_E^\infty \underline{dE'} \int_{4\pi} \underline{d\Omega'} \Sigma_s(\underline{r}, E' \rightarrow E, \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega}) \mathcal{Y}(\underline{r}, E', \underline{\Omega}', t)$$

Hierin ist bereits enthalten, daß die Streuquerschnitte zeitlich konstant sind und eine Heraufstreuung nicht stattfindet ( $E' > E$ ).

- Die Gewinne durch räumliche Zustreuung sind mit den Verlusten im Divergenzterm zusammengefasst.

Damit ergeben sich die Gewinne:

$$(1.2) \quad \text{Gewinne} = \underline{dr} \underline{dE} \underline{d\Omega} \cdot \left[ \frac{1}{4\pi} s(\underline{r}, E) + \int_E^\infty \underline{dE'} \int_{4\pi} \underline{d\Omega'} \Sigma_s(\underline{r}, E' \rightarrow E, \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega}) \mathcal{Y}(\underline{r}, E', \underline{\Omega}', t) \right]$$

### 1.1.2. Verluste

#### - räumliche Streuung

Die Differenz zwischen der Zahl der in das Volumenelement einströmenden und daraus ausströmenden Photonen wird beschrieben durch die Divergenz der Stromdichten

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{j}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}, t) \cdot \underline{dr} dE d\underline{\Omega} \\ = \operatorname{div}(\underline{\Omega} \cdot \mathcal{S}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}, t)) \underline{dr} dE d\underline{\Omega} \\ = \underline{\Omega} \nabla(\mathcal{S}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}, t)) \underline{dr} dE d\underline{\Omega} \end{aligned}$$

#### - Absorption

$$\sum_A(\underline{r}, E) \mathcal{S}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}, t) \underline{dr} dE d\underline{\Omega}$$

o.B.d.A. wird Isotropie und zeitliche Konstanz angenommen.

#### - Abstreuerung

$$\underline{dr} dE d\underline{\Omega} \int_0^E dE' \int_{4\pi} d\underline{\Omega}' \sum_S(\underline{r}, E \rightarrow E', \underline{\Omega} \rightarrow \underline{\Omega}') \mathcal{S}(\underline{r}, E', \underline{\Omega}', t)$$

Damit:

$$\begin{aligned} (1.3) \text{ Verluste} = \underline{dr} dE d\underline{\Omega} \cdot \left[ \underline{\Omega} \nabla \mathcal{S}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}, t) + \mathcal{S}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}, t) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left( \sum_A(\underline{r}, E) + \int_0^E dE' \int_{4\pi} d\underline{\Omega}' \sum_S(\underline{r}, E \rightarrow E', \underline{\Omega} \rightarrow \underline{\Omega}') \right) \right] \end{aligned}$$

### 1.1.3. vollständige Transportgleichung

Durch Einsetzen von (1.2) und (1.3) in (1.1) erhalten wir die Transportgleichung für Photonen in ihrer allgemeinsten Form:

(1.4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{S}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} s(\underline{r}, E) + \\ + \int_E^\infty dE' \int_{4\pi} d\underline{\Omega}' \sum_S(\underline{r}, E' \rightarrow E, \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega}) \mathcal{S}(\underline{r}, E', \underline{\Omega}', t) - \\ - \underline{\Omega} \nabla \mathcal{S}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}, t) - \mathcal{S}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}, t) \cdot \\ \cdot \left( \sum_A(\underline{r}, E) + \int_0^E dE' \int_{4\pi} d\underline{\Omega}' \sum_S(\underline{r}, E \rightarrow E', \underline{\Omega} \rightarrow \underline{\Omega}') \right) \end{aligned}$$

## 1.2. Die $P_1$ Näherung

Gleichung (1.4) ist in voller Allgemeinheit nicht lösbar. Sie enthält vier Abhängigkeiten von Zeit, Ort, Energie und Richtung. Wir beschränken uns auf das stationäre Problem

$$(1.5) \quad \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{S} = 0$$

Die Ortsabhängigkeit ist Thema unserer Aufgabenstellung. Für die Energie wollen wir die Gruppenrechnung anwenden. Es bleibt daher noch die Elimination der Richtung. Sie läßt sich nach Kugelflächenfunktionen entwickeln. /Bo Ma/, /Be 70/  
Wir definieren den totalen Wirkungsquerschnitt

$$(1.6) \quad \Sigma_T(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) := \Sigma_A(\underline{r}, E) + \int_0^E dE' \int_{4\pi} d\Omega' \Sigma_S(\underline{r}, E \rightarrow E', \underline{\Omega} \rightarrow \underline{\Omega}')$$

Mit (1.5) und (1.6) wird (1.4) zu

$$(1.7) \quad \underline{\Omega} \cdot \nabla \mathcal{S}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) + \Sigma_T(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) \mathcal{S}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} s(\underline{r}, E) + \int_E^\infty dE' \int_{4\pi} d\Omega' \Sigma_S(\underline{r}, E' \rightarrow E, \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega}) \mathcal{S}(\underline{r}, E', \underline{\Omega}')$$

Für die weitere Betrachtung führen wir jetzt eine Bezugsrichtung  $\hat{\underline{\Omega}}$  ein und nehmen azimutale Symmetrie an. Dann läßt sich als neue Variable der Cosinus des Polarwinkels einführen

$$\begin{aligned} \mu &:= \hat{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\Omega} \\ \mu' &:= \hat{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\Omega}' \\ \mu_r &:= \underline{\Omega} \cdot \underline{\Omega}' \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$(1.8) \quad \mathcal{S}(\underline{r}, E, \mu) dE d\mu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \mathcal{S}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) dE \sin\vartheta d\vartheta = 2\pi \mathcal{S}(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) dE d\mu$$

$$(1.9) \quad \begin{aligned} s(\underline{r}, E, \mu) dE d\mu &= 2\pi s(\underline{r}, E, \underline{\Omega}) dE d\mu \\ &= \frac{2\pi}{4\pi} s(\underline{r}, E) dE d\mu \\ &= \frac{1}{2} s(\underline{r}, E) dE d\mu \end{aligned}$$

Eingesetzt in (1.7)

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \mu \frac{\delta}{\delta x} \mathcal{S}(\underline{r}, E, \mu) + \Sigma_T(\underline{r}, E, \mu) \mathcal{S}(\underline{r}, E, \mu) \\ = \frac{1}{2} s(\underline{r}, E) + \int_E^\infty dE' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \int_{-1}^1 d\mu' \Sigma_S(\underline{r}, E' \rightarrow E, \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega}) + \mathcal{S}(\underline{r}, E', \underline{\Omega}') \end{aligned}$$

Eine Schwierigkeit ergibt sich aus dem Mehrfachintegral der rechten Seite, da sich die Integration nach  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}'$  nicht separieren läßt. Wir verwenden die Entwicklung einer Funktion des Cosinus des Polarwinkels nach Legendre-Polynomen

$$(1.11) \quad F(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} F_n P_n(\mu)$$

mit

$$(1.12) \quad F_n := \int_{-1}^1 d\mu F(\mu) P_n(\mu)$$

Dabei sind die  $P_n$  die Legendre Polynome n-ter Ordnung. Unter der Voraussetzung azimuthaler Symmetrie gilt

$$(1.13) \quad \sum_S (\underline{r}, E' \rightarrow E, \mu_r) = 2\pi \sum_S (\underline{r}, E' \rightarrow E, \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega})$$

$$(1.14) \quad \sum_S (\underline{r}, E' \rightarrow E, \mu_r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} \sum_i^S (\underline{r}, E' \rightarrow E) P_{\ell}(\mu_r)$$

mit

$$(1.15) \quad \sum_i^S (\underline{r}, E' \rightarrow E) = \int_{-1}^1 d\mu_r \sum_S (\underline{r}, E' \rightarrow E, \mu_r) P_{\ell}(\mu_r)$$

$P_{\ell}(\mu_r)$  läßt sich unter Berücksichtigung der Bezugsrichtung nach  $\mu$  und  $\mu'$  weiter entwickeln /Ro 60/

$$(1.16) \quad P_{\ell}(\mu_r) = P_{\ell}(\mu) P_{\ell}(\mu') + 2 \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(\mu) P_{\ell}^m(\mu') \cos m(\vartheta - \vartheta')$$

Wir entwickeln  $\mathcal{S}(\underline{r}, E', \mu')$  nach (1.11), verwenden (1.8) und (1.13) sowie

$$(1.17) \quad \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( a_{\ell} \cdot \sum_{n=\ell}^{\infty} b_n \right)$$

und erhalten:

$$(1.18) \quad \int_E^{\infty} dE' \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\vartheta' \int_{-1}^1 d\mu' \mathcal{S}(\underline{r}, E', \underline{\Omega}') \sum_S (\underline{r}, E' \rightarrow E, \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega}) \\ = \int_E^{\infty} dE' \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\vartheta' \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \mathcal{S}_n(\underline{r}, E) P_n(\mu') \cdot \\ \cdot \left[ \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} \sum_i^S (\underline{r}, E' \rightarrow E) P_{\ell}(\mu) P_{\ell}(\mu') + \right. \\ \left. + \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} \sum_i^S (\underline{r}, E' \rightarrow E) \cdot 2 \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(\mu) P_{\ell}^m(\mu') \cos m(\vartheta - \vartheta') \right]$$

Wegen  $\int_0^{2\pi} d\vartheta \cos m(\vartheta - \vartheta') = 0$  für  $m \in \mathbb{Z}$

fällt der letzte Summand bei der  $\vartheta$ -Integration heraus. Ferner gilt für Legendre-Polynome eine Orthogonalitätsrelation

$$(1.19) \quad \int_{-1}^1 d\mu' P_{\ell}(\mu') P_n(\mu') = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell,n}$$

Somit

$$(1.20) \int_E^\infty dE' \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \mathcal{Y}(\underline{r}, E', \underline{\Omega}') \sum_s (\underline{r}, E' \rightarrow E, \underline{\Omega}' \rightarrow \underline{\Omega})$$

$$= \int_E^\infty dE' \sum_{\ell=0}^\infty \frac{2\ell+1}{2} \sum_s^s (\underline{r}, E' \rightarrow E) \mathcal{Y}_\ell(\underline{r}, E') \mathcal{P}_\ell(\mu)$$

Wir setzen alle Ergebnisse in (1.10) ein, multiplizieren ein

$$\mathcal{P}_n(\mu) \quad (n \in \mathbb{N}, \text{beliebig})$$

an, und verwenden die Rekursion

$$(1.21) \mu \mathcal{P}_n(\mu) = \frac{n+1}{2n+1} \mathcal{P}_{n+1}(\mu) + \frac{n}{2n+1} \mathcal{P}_{n-1}(\mu)$$

und integrieren über  $\mu$ :

$$(1.22) \sum_{\ell=0}^\infty \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \left[ \frac{n+1}{2n+1} \mathcal{P}_{n+1}(\mu) + \frac{n}{2n+1} \mathcal{P}_{n-1}(\mu) \right] \mathcal{P}_\ell(\mu) \frac{\delta}{\delta x} \mathcal{Y}_\ell(\underline{r}, E) +$$

$$+ \sum_T (\underline{r}, E, \mu) \sum_{\ell=0}^\infty \frac{2\ell+1}{2} \mathcal{Y}_\ell(\underline{r}, E) \int_{-1}^1 d\mu \mathcal{P}_n(\mu) \mathcal{P}_\ell(\mu)$$

$$= \sum_{\ell=0}^\infty \frac{2\ell+1}{2} s_\ell(\underline{r}, E) \int_{-1}^1 d\mu \mathcal{P}_n(\mu) \mathcal{P}_\ell(\mu) +$$

$$+ \sum_{\ell=0}^\infty \frac{2\ell+1}{2} \int_E^\infty dE' \sum_s^s (\underline{r}, E' \rightarrow E) \mathcal{Y}_\ell(\underline{r}, E') \int_{-1}^1 d\mu \mathcal{P}_n(\mu) \mathcal{P}_\ell(\mu)$$

Anwendung von (1.19)

$$(1.23) \frac{n+1}{2n+1} \frac{\delta}{\delta x} \mathcal{Y}_{n+1}(\underline{r}, E) + \frac{n}{2n+1} \frac{\delta}{\delta x} \mathcal{Y}_{n-1}(\underline{r}, E) + \sum_T (\underline{r}, E) \mathcal{Y}_n(\underline{r}, E)$$

$$= s_n(\underline{r}, E) + \int_E^\infty dE' \sum_n^s (\underline{r}, E' \rightarrow E) \mathcal{Y}_n(\underline{r}, E')$$

Da  $n \in \mathbb{N}$ , beliebig sind das  $\infty$  viele Gleichungen. Bei Vernachlässigung aller Terme von zweiter Ordnung aufwärts erhalten wir die  $P_1$ -Näherung. Die Gleichungen der 0. und 1. Ordnung lauten explizit:

$$(1.24) \frac{\delta}{\delta x} \mathcal{Y}_1(\underline{r}, E) + \sum_T (\underline{r}, E) \mathcal{Y}_0(\underline{r}, E)$$

$$= s(\underline{r}, E) + \int_E^\infty dE' \sum_0^s (\underline{r}, E' \rightarrow E) \mathcal{Y}_0(\underline{r}, E')$$

$$(1.25) \frac{1}{3} \frac{\delta}{\delta x} \mathcal{Y}_0(\underline{r}, E) + \sum_T (\underline{r}, E) \mathcal{Y}_1(\underline{r}, E)$$

$$= \int_E^\infty dE' \sum_1^s (\underline{r}, E' \rightarrow E) \mathcal{Y}_1(\underline{r}, E')$$

Zur weiteren Auswertung benötigen wir eine Näherung für das Integral in (1.25). Wir müssen dazu annehmen, daß die Absorption gegen die Streuung vernachlässigbar klein sei.

Ohne Quelle und Absorption gilt aber Zustreuung  $\approx$  Wegstreuung, also

$$(1.26) \quad \int_E^\infty dE' \Sigma_1^s(\underline{r}, E' \rightarrow E) \mathcal{Y}_1(\underline{r}, E') \simeq \int_0^E dE' \Sigma_1^s(\underline{r}, E \rightarrow E') \mathcal{Y}_1(\underline{r}, E)$$

$$(1.25a) \quad \frac{1}{3} \frac{\delta}{\delta x} \mathcal{Y}_0(\underline{r}, E) + \Sigma_T(\underline{r}, E) \mathcal{Y}_1(\underline{r}, E) = \int_0^E dE' \Sigma_1^s(\underline{r}, E \rightarrow E') \mathcal{Y}_1(\underline{r}, E)$$

$$(1.25b) \quad \mathcal{Y}_1(\underline{r}, E) = \frac{-1}{3(\Sigma_T(\underline{r}, E) - \int_0^E dE' \Sigma_1^s(\underline{r}, E \rightarrow E'))} \cdot \frac{\delta}{\delta x} \mathcal{Y}_0(\underline{r}, E)$$

Einsetzen in (1.24) gibt

$$(1.27) \quad -\frac{\delta}{\delta x} \mathcal{D}(\underline{r}, E) \frac{\delta}{\delta x} \mathcal{Y}(\underline{r}, E) + \Sigma_T \mathcal{Y}(\underline{r}, E) \\ = S(\underline{r}, E) + \int_E^\infty dE' \Sigma_s(\underline{r}, E' \rightarrow E) \mathcal{Y}(\underline{r}, E')$$

Dies ist die bekannte Diffusionsgleichung, mit dem Diffusionskoeffizienten

$$(1.28) \quad \mathcal{D}(\underline{r}, E) := \left( 3 \left[ \Sigma_T(\underline{r}, E) - \int_0^E dE' \Sigma_1^s(\underline{r}, E \rightarrow E') \right] \right)^{-1}$$

### 1.3. Die Energiegruppengleichung

Wir setzen voraus, daß der Diffusionskoeffizient innerhalb eines Mediums konstant ist

$$\frac{d}{dx} \mathcal{D}(\underline{r}, E) = 0$$

Ferner gibt es eine Maximalenergie  $E_{\max}$

$$E > E_{\max} \Rightarrow \mathcal{S}(E) = 0$$

Dann gilt am Ort  $\underline{r}$ :

$$\begin{aligned} (1.27a) \quad & -\mathcal{D}(E) \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{S}(E) + \mathcal{S}(E) \left[ \Sigma_A(E) + \int_0^E dE' \Sigma_S(E \rightarrow E') \right] \\ & = s(E) + \int_E^{E_{\max}} dE' \mathcal{S}(E') \Sigma_S(E' \rightarrow E) \end{aligned}$$

Wir bilden nun I Energiegruppen

$$[E_i, E_{i+1}]_{i \in \hat{I}} \text{ mit } E_1 = 0, E_{I+1} \geq E_{\max}; \Delta E_i := E_{i+1} - E_i$$

Definition der Gruppenflüsse:

$$(1.29) \quad \mathcal{S}_i = \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \mathcal{S}(E)$$

Ferner führen wir eine Formfunktion  $\phi_i(E)$  ein, so daß

$$(1.30) \quad E \in [E_i, E_{i+1}] \Rightarrow \mathcal{S}(E) = \frac{1}{\Delta E_i} \mathcal{S}_i \phi_i(E)$$

$\phi_i(E)$  ist damit stets normiert

$$(1.31) \quad \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \phi_i(E) = \Delta E_i = E_{i+1} - E_i$$

Die Diffusionsgleichung für die i-te Gruppe ergibt sich dann als Integral von (1.27a) über  $[E_i, E_{i+1}]$ . Wir wollen das gliedweise betrachten:

$$\begin{aligned} (1.32) \quad & \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE (-\mathcal{D}(E)) \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{S}(E) = \frac{-d^2}{dx^2} \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \mathcal{D}(E) \mathcal{S}_i \frac{\phi_i(E)}{\Delta E_i} \\ & = \frac{-d^2}{dx^2} \mathcal{S}_i \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \mathcal{D}(E) \frac{\phi_i(E)}{\Delta E_i} \\ & =: -\mathcal{D}_i \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{S}_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1.33) \quad & \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \Sigma_A(E) \mathcal{S}(E) = \mathcal{S}_i \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \Sigma_A(E) \frac{\phi_i(E)}{\Delta E_i} \\ & =: \mathcal{S}_i \Sigma_i^A \end{aligned}$$

$$(1.34) \quad \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE s(E) =: s_i$$

$$\begin{aligned}
 (1.35) \quad & \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \mathcal{V}(E) \int_0^E dE' \Sigma_S(E \rightarrow E') \\
 &= \mathcal{V}_i \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \frac{\vartheta_i(E)}{\Delta E_i} \int_0^E dE' \Sigma_S(E \rightarrow E') \\
 &= \mathcal{V}_i \sum_{j=1}^{i-1} \int_{E_i}^{E_{j+1}} dE \frac{\vartheta_i(E)}{\Delta E_i} \int_{E_j}^{E_{j+1}} dE' \Sigma_S(E \rightarrow E') + \\
 &+ \mathcal{V}_i \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \frac{\vartheta_i(E)}{\Delta E_i} \int_{E_i}^E dE' \Sigma_S(E \rightarrow E') \\
 &=: \mathcal{V}_i \sum_{j=1}^{i-1} \Sigma_{i \rightarrow j} + \mathcal{V}_i \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \int_{E_i}^E dE' \frac{\vartheta_i(E)}{\Delta E_i} \Sigma_S(E \rightarrow E')
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.36) \quad & \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \int_E^{E_{i+1}} dE' \mathcal{V}(E') \Sigma_S(E' \rightarrow E) \\
 &= \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \sum_{j=i+1}^I \mathcal{V}_j \int_{E_j}^{E_{j+1}} dE' \frac{\vartheta_j(E')}{\Delta E_j} \Sigma_S(E' \rightarrow E) + \\
 &+ \mathcal{V}_i \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \int_E^{E_{i+1}} dE' \frac{\vartheta_i(E')}{\Delta E_i} \Sigma_S(E' \rightarrow E) \\
 &=: \sum_{j=i+1}^I \mathcal{V}_j \Sigma_{j \rightarrow i} + \mathcal{V}_i \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \int_E^{E_{i+1}} dE' \frac{\vartheta_i(E')}{\Delta E_i} \Sigma_S(E' \rightarrow E)
 \end{aligned}$$

Bei den Resttermen in (1.35) und (1.36) ist zu berücksichtigen, daß  $E' > E \Rightarrow \Sigma_S(E \rightarrow E') = 0$ , ergo

$$\begin{aligned}
 (1.37) \quad & \mathcal{V}_i \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \int_{E_i}^E dE' \frac{\vartheta_i(E)}{\Delta E_i} \Sigma_S(E \rightarrow E') \\
 &= \mathcal{V}_i \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE' \frac{\vartheta_i(E)}{\Delta E_i} \Sigma_S(E \rightarrow E') \\
 &= \mathcal{V}_i \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE' \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \frac{\vartheta_i(E)}{\Delta E_i} \Sigma_S(E \rightarrow E') \\
 &= \mathcal{V}_i \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE' \frac{\vartheta_i(E')}{\Delta E_i} \Sigma_S(E' \rightarrow E) \\
 &= \mathcal{V}_i \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \int_E^{E_{i+1}} dE' \frac{\vartheta_i(E')}{\Delta E_i} \Sigma_S(E' \rightarrow E)
 \end{aligned}$$

Die Restterme heben sich also gegenseitig auf. Damit lautet die Gruppendiffusionsgleichung

$$(1.38) \quad -\mathcal{D}_i \frac{\delta^2}{\delta x^2} \mathcal{Y}_i + \sum_i^A \mathcal{Y}_i + \mathcal{Y}_i \sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{E}_{i \rightarrow j} = s_i + \sum_{j=i+1}^I \mathcal{Y}_j \mathcal{E}_{j \rightarrow i}$$

Obwohl es sich um einen Satz von I gekoppelten Gleichungen handelt, sehen wir, daß  $\mathcal{Y}_i$  nur von den  $\mathcal{Y}_j, j > i$  abhängt. Es ist also möglich, sie beginnend mit der höchsten Gruppe sukzessive abzuarbeiten.

#### 1.4. Allgemeine Geometrie

Die Beziehung (1.27) wurde in Kap. 1.2. lediglich für den eindimensionalen Fall abgeleitet. Ohne Beweis setzen wir im Folgenden voraus, daß sie auch dreidimensional richtig bleibt. /Be 70, Kap. 3/, /Bo Ma, Kap. 8/

$$(1.38a) \quad -\mathcal{D}_i \Delta \mathcal{Y}_i + \mathcal{Y}_i \sum_i^A + \mathcal{Y}_i \sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{E}_{i \rightarrow j} = s_i + \sum_{j=i+1}^I \mathcal{Y}_j \mathcal{E}_{j \rightarrow i}$$

Dabei ist  $\Delta$  der Laplace-Operator

$$(1.39) \quad \Delta := \left( \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2} \right) \\ := \left( \frac{\delta^2}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2}{\delta \vartheta^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2} \right) \\ := \left( \frac{\delta^2}{\delta r^2} + \frac{2}{r} \frac{\delta}{\delta r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\delta^2}{\delta \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\delta}{\delta \vartheta} \sin \vartheta \frac{\delta}{\delta \vartheta} \right)$$

in kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten. /Ro 60/ Die Behandlung unseres Problems soll sich hier auf den eindimensionalen Fall beschränken. Das heißt wir unterstellen je nach Geometrie die Symmetriebedingungen

$$(1.40) \quad \frac{\delta}{\delta y} \mathcal{Y} = \frac{\delta}{\delta z} \mathcal{Y} = 0 \\ \frac{\delta}{\delta \varphi} \mathcal{Y} = \frac{\delta}{\delta z} \mathcal{Y} = 0 \\ \frac{\delta}{\delta \varphi} \mathcal{Y} = \frac{\delta}{\delta \vartheta} \mathcal{Y} = 0$$

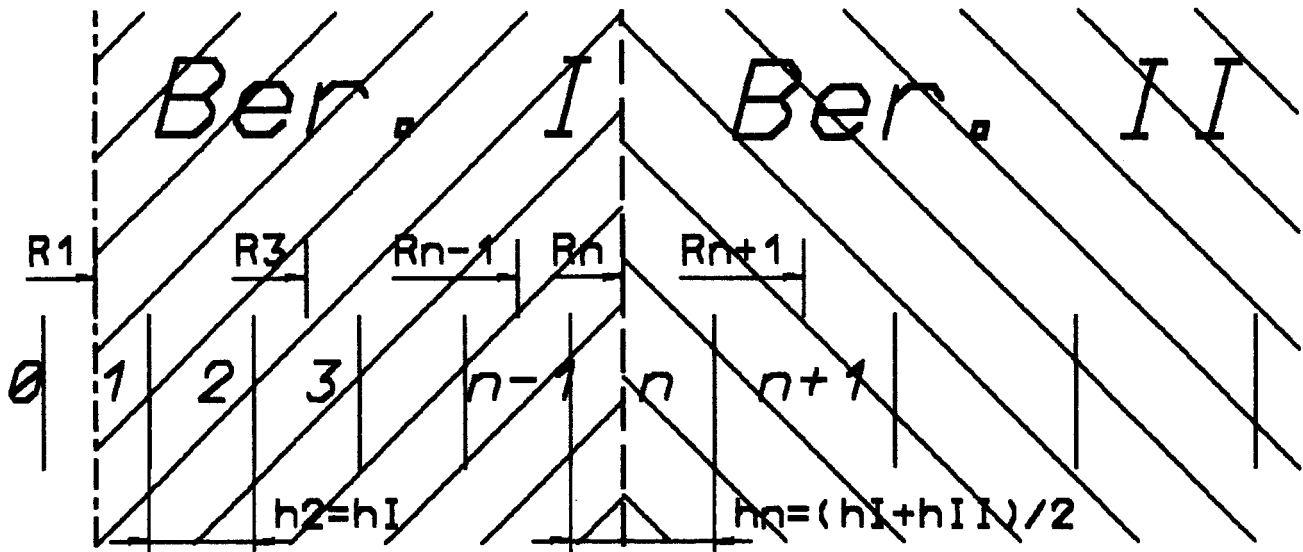
$$(1.41) \quad -\mathcal{D}_i \left( \frac{\delta^2}{\delta r^2} + \frac{\mathcal{L}}{r} \frac{\delta}{\delta r} \right) \mathcal{Y}_i + \mathcal{Y}_i \sum_i^A + \mathcal{Y}_i \sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{E}_{i \rightarrow j} = s_i + \sum_{j=i+1}^I \mathcal{Y}_j \mathcal{E}_{j \rightarrow i}$$

mit  $\mathcal{L} = 0$  für ebene  
 $\mathcal{L} = 1$  für Zylinder-  
 $\mathcal{L} = 2$  für Kugelgeometrie.

In unserer speziellen Aufgabenstellung also  $\mathcal{L} = 1$ . Die einfache Form der Änderung erlaubt es jedoch, das Programm flexibel zu halten und so an jede gegebene (eindimensionale) Geometrie durch Setzung nur einer Variablen anzupassen.

### 1.5. Die Ortsgruppengleichung

Wir teilen nun die Anordnung in radialer Richtung in  $N$  Streifen auf. Dabei sollen alle Materialgrenzen jeweils im Zentrum eines Streifens liegen und die Streifenbreite innerhalb eines Mediums konstant sein. /Be 70/



Als Richtwert für die geeignete Wahl von  $h$  gilt:

$$h \approx (\Sigma_n + \Sigma_s)^{-1}$$

Wir wollen die Schrittweite jedoch für alle Energiegruppen einheitlich wählen.

Im Folgenden wollen wir jeweils nur eine Energiegruppe betrachten und den Index  $i$  nicht mehr schreiben. Stattdessen ist nun der Streifenindex  $n$  zu berücksichtigen. Damit wird (1.41) zu:

$$(1.42) \quad -\left(\frac{\sigma}{\sigma r} + \frac{\kappa}{r}\right) \left(\partial \frac{\sigma}{\sigma r} \varphi\right)_n + \left(\Sigma_n^R + \sum_{j=1}^{i-1} \Sigma_n^{i \rightarrow j}\right) \varphi_n = S_n + \sum_{j=i+1}^I \Sigma_n^{j \rightarrow i} \varphi_n^j$$

#### 1.5.1. Diskretisierung der Differentialquotienten

Für die Ableitungen verwenden wir folgende Näherungen:

$$(1.43) \quad \left(\frac{\sigma}{\sigma r} \partial \frac{\sigma}{\sigma r} \varphi\right)_n \approx \frac{(\partial \frac{\sigma}{\sigma r} \varphi)_{n+\frac{1}{2}} - (\partial \frac{\sigma}{\sigma r} \varphi)_{n-\frac{1}{2}}}{h_n}$$

$$\approx \frac{1}{h_n} \left[ \frac{\partial_{n+\frac{1}{2}}}{h_{n+\frac{1}{2}}} (\varphi_{n+1} - \varphi_n) - \frac{\partial_{n-\frac{1}{2}}}{h_{n-\frac{1}{2}}} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) \right]$$

Falls  $n$  nicht auf einer Mediengrenze liegt, wird das zu:

$$(1.43a) \quad \left(\frac{\sigma}{\sigma r} \partial \frac{\sigma}{\sigma r} \varphi\right)_n \approx \frac{\partial_n}{h_n^2} (\varphi_{n+1} + \varphi_{n-1} - 2\varphi_n)$$

Ist  $n$  eine Grenzfläche:

$$(1.43b) \quad \left(\frac{\sigma}{\sigma r} \partial \frac{\sigma}{\sigma r} \varphi\right)_n \approx \frac{\partial_{n+1}}{h_n h_{n+1}} (\varphi_{n+1} - \varphi_n) - \frac{\partial_{n-1}}{h_n h_{n-1}} (\varphi_n - \varphi_{n-1})$$

Entsprechend ist:

$$(1.44) \quad \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \varphi \right)_n \approx \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \varphi \right)_{n+\frac{1}{2}} + \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \varphi \right)_{n-\frac{1}{2}} \right]$$

$$\approx \frac{\partial}{2} \left[ \frac{D_{n+1}}{r_{n+\frac{1}{2}} \cdot h_{n+1}} (\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \frac{D_{n-1}}{r_{n-\frac{1}{2}} \cdot h_{n-1}} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) \right]$$

Im Medieninneren:

$$(1.44a) \quad \partial \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \varphi \right)_n \approx \frac{\partial D_n}{2 h_n} \left( \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{r_{n+\frac{1}{2}}} + \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{r_{n-\frac{1}{2}}} \right)$$

Auf Mediengrenzen:

$$(1.44b) \quad \partial \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \varphi \right)_n \approx \frac{\partial}{2} \left( \frac{D_{n+1}}{h_{n+1}} \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{r_{n+\frac{1}{2}}} + \frac{D_{n-1}}{h_{n-1}} \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{r_{n-\frac{1}{2}}} \right)$$

Die Gleichungen für die N-2 inneren Streifen lassen sich damit schreiben. Es fehlen noch die Randbedingungen für n=1 und n=N.

### 1.5.2. Ursprung

Hier wird die Näherung wegen  $r \approx h$  recht ungenau. Da jedoch gerade die innersten Streifen zum Volumen nur sehr wenig beitragen, bleibt sie immer noch brauchbar. Wir legen den ersten Streifen auf die Symmetrielinie:

$$r_1 = 0$$

und führen einen hypothetischen Streifen  $r_{01}$  ein. Die Symmetriebedingung im Ursprung führt auf die Forderung:

$$(1.45) \quad \varphi_0 = \varphi_2$$

$$(1.46a) \quad \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \varphi \right)_1 \approx \frac{D_1}{h_1^2} (\varphi_2 + \varphi_0 - 2\varphi_1)$$

$$= \frac{2D_1}{h_1^2} (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$(1.46b) \quad \partial \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \varphi \right)_1 \approx \frac{\partial}{2} \frac{D_1}{h_1} \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r_{1+\frac{1}{2}}} + \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{r_{1-\frac{1}{2}}} \right)$$

$$= \frac{\partial}{2} \frac{D_1}{h_1} \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{h_{\frac{1}{2}}} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{-h_{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$= \frac{2\partial D_1}{h_1^2} (\varphi_2 - \varphi_1)$$

### 1.5.3. Außenrand

Den letzten Stützpunkt  $r_N$  wollen wir auf die Grenzfläche Abschirmung-Luft legen. Es bietet sich die übliche Vakuum Randbedingung an:

$$(1.47) \quad \mathcal{Y}_N = -2 \left( \mathcal{D} \frac{\sigma}{\sigma r} \mathcal{Y} \right)_{N+\frac{1}{2}}$$

Im Gegensatz zu den anderen Grenzflächen sind hier jedoch die Materialkonstanten für den Absorber zu nehmen, da die Bedingung für dessen Außenrand gilt. Damit:

$$(1.48) \quad \mathcal{D}_{N+1} = \mathcal{D}_{N-1} = \mathcal{D}_N ; \quad h_{N+1} = h_{N-1} = h_N$$

$$(1.49) \quad -\frac{\mathcal{Y}_N}{2} = \frac{\mathcal{D}_N}{h_N} (\mathcal{Y}_{N+1} - \mathcal{Y}_N)$$

$$(1.50a) \quad \left( \frac{\sigma}{\sigma r} \mathcal{D} \frac{\sigma}{\sigma r} \mathcal{Y} \right)_N \simeq \frac{1}{h_N} \left[ -\frac{\mathcal{Y}_N}{2} - \frac{\mathcal{D}_N}{h_N} (\mathcal{Y}_N - \mathcal{Y}_{N-1}) \right]$$

$$(1.50b) \quad \mathcal{X} \left( \frac{\mathcal{D}}{r} \frac{\sigma}{\sigma r} \mathcal{Y} \right)_N \simeq \frac{\mathcal{X}}{2} \left[ \frac{-\mathcal{Y}_N}{2r_{N+\frac{1}{2}}} + \frac{\mathcal{D}_N}{h_N r_{N-\frac{1}{2}}} (\mathcal{Y}_N - \mathcal{Y}_{N-1}) \right]$$

#### 1.5.4. Innenrand

Die Behandlung des Ursprunges führt wie oben gesehen auf gewisse Probleme. Falls Streuung und Absorption im zentralen Medium gegen die Quellstärke vernachlässigbar sind, bietet sich daher eine Bedingung für den Innenrand der ersten Abschirmung an. Wir fordern, daß alle im Quellmedium erzeugten Photonen durch diese Grenzfläche hindurchtreten:

$$(1.51) \quad \pi r_1^2 S = - \pi r_1 \mathcal{D}_1 \left( \frac{\sigma}{\sigma r} \mathcal{Y} \right)_1 \\ \Rightarrow r_1 S = -\frac{\mathcal{D}_1}{h_1} (\mathcal{Y}_1 - \mathcal{Y}_0)$$

Eingesetzt:

$$(1.52a) \quad \left( \frac{\sigma}{\sigma r} \mathcal{D} \frac{\sigma}{\sigma r} \mathcal{Y} \right)_1 \simeq \frac{1}{h_1} \left[ \frac{\mathcal{D}_1}{h_1} (\mathcal{Y}_2 - \mathcal{Y}_1) + r_1 S \right]$$

$$(1.52b) \quad \mathcal{X} \left( \frac{\mathcal{D}}{r} \frac{\sigma}{\sigma r} \mathcal{Y} \right)_1 \simeq \frac{\mathcal{X}}{2r_1} \left[ \frac{\mathcal{D}_1}{h_1} (\mathcal{Y}_2 - \mathcal{Y}_1) - r_1 S \right]$$

#### 1.5.5. Aufstellen der Matrix und des Quellvektors

Gleichung (1.42) wird also zum System:

$$(1.53) \quad A_{n,n-1} \mathcal{Y}_{n-1} + A_{n,n} \mathcal{Y}_n + A_{n,n+1} \mathcal{Y}_{n+1} = q_n$$

oder

$$(1.53a) \quad \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\mathcal{Y}}} = \underline{\underline{q}}$$

Formal lautet die Aufgabenstellung also, die Matrix A zu invertieren

$$(1.53b) \quad \underline{y} = \underline{A}^{-1} \underline{q}$$

Diese Inversion ist stets möglich, da der Betrag der Diagonalelemente stets um die Absorption größer ist als die Summe der Beträge der beiden Nebendiagonalen. /Be 70/ Wir wollen die Matrixelemente nun für die i-te Energiegruppe vollständig aufzählen. Dabei dient zur Vereinfachung wieder die Einführung des totalen Wirkungsquerschnittes  $\Sigma_T$ :

$$(1.54) \quad \Sigma_n^{T,i} = \Sigma_n^{A,i} + \sum_{j=1}^{i-1} \Sigma_n^{i \rightarrow j}$$

#### 1.5.5.1. untere Nebendiagonale

- Medieninneres

$$(1.55a) \quad A_{n,n-1} = \frac{-D_n}{h_n} \left( \frac{1}{h_n} - \frac{x}{2r_{n-\frac{1}{2}}} \right)$$

- Grenzfläche

$$(1.55b) \quad A_{n,n-1} = \frac{-D_{n-1}}{h_{n-1}} \left( \frac{1}{h_n} - \frac{x}{2r_{n-\frac{1}{2}}} \right)$$

- Zentrum

nicht definiert

- Innenrand

nicht definiert

- Außenrand

$$(1.55c) \quad A_{N,N-1} = \frac{-D_N}{h_N} \left( \frac{1}{h_N} - \frac{x}{2r_{N-\frac{1}{2}}} \right)$$

#### 1.5.5.2. Hauptdiagonale

- Medieninneres

$$(1.56a) \quad A_{n,n} = \frac{2D_n}{h_n^2} + \frac{x D_n}{2h_n} \left( \frac{1}{r_{n+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r_{n-\frac{1}{2}}} \right) + \Sigma_n^T$$

- Grenzfläche

$$(1.56b) \quad A_{n,n} = \frac{D_{n+1}}{h_{n+1}} \left( \frac{1}{h_n} + \frac{x}{2r_{n+\frac{1}{2}}} \right) + \frac{D_{n-1}}{h_{n-1}} \left( \frac{1}{h_n} - \frac{x}{2r_{n-\frac{1}{2}}} \right) + \frac{h_{n+1} \Sigma_{n+1}^T + h_{n-1} \Sigma_{n-1}^T}{2h_n}$$

- Zentrum

$$(1.56c) \quad A_{1,1} = \frac{D_1}{h_1^2} (2 + 2x) + \frac{1}{2} \Sigma_1^T$$

- Innenrand

$$(1.56d) \quad A_{1,1} = \frac{D_1}{h_1} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{x}{2r_{1+\frac{1}{2}}} \right) + \Sigma_1^T$$

-Außenrand

$$(1.56e) \quad A_{N,N} = \frac{D_N}{h_N} \left( \frac{1}{h_N} - \frac{x}{2r_{N-\frac{1}{2}}} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_N} + \frac{x}{2r_{N+\frac{1}{2}}} \right) + \Sigma_N^T$$

### 1.5.5.3. obere Nebendiagonale

- Medieninneres

$$(1.57a) \quad A_{n,n+1} = \frac{-D_n}{h_n} \left( \frac{1}{h_n} + \frac{x}{2r_{n+\frac{1}{2}}} \right)$$

- Grenzfläche

$$(1.57b) \quad A_{n,n+1} = \frac{-D_{n+1}}{h_{n+1}} \left( \frac{1}{h_n} + \frac{x}{2r_{n+\frac{1}{2}}} \right)$$

- Zentrum

$$(1.57c) \quad A_{1,2} = \frac{-D_1}{h_1^2} (2 + 2x)$$

- Innenrand

$$(1.57d) \quad A_{1,2} = \frac{-D_1}{h_1} \left( \frac{1}{h_1} + \frac{x}{2r_{1+\frac{1}{2}}} \right)$$

- Außenrand

nicht definiert

### 1.5.5.4. Quellvektor ohne Streuterm

- Medium

$$(1.58a) \quad S_n = S$$

- Zentrum

$$(1.58b) \quad S_1 = \frac{1}{2} S$$

- Innenrand

$$(1.58c) \quad S_1 = S \left( \frac{r_1}{h_1} - \frac{x}{2} \right)$$

- Grenzfläche

$$(1.58d) \quad S_n = S \frac{h_1}{h_1 + h_2}$$

## 1.6. Ermittlung der Dosisleistung

Zur Errechnung der maximalen Dosisleistung für einen Menschen unmittelbar außerhalb der Abschirmung legen wir auf die Außenwand eine 20 cm dicke Schicht aus Weichteilgewebe gemäß Strahlenschutzverordnung Anlage 1 und berechnen die Energieabsorption in dieser Schicht. Dazu bilden wir die Differenz aus eintretendem und austretendem Energiestrom. Die Energiestromdichte für die  $i$ -te Gruppe lautet

$$(1.59a) \quad g^i = \int_i^{i+1} dE \, j(E) E = \int_i^{i+1} dE \, E \, D(E) \frac{\delta}{\delta x} \mathcal{Y}(E)$$

$$(1.59b) \quad g^i \approx \frac{E_i + E_{i+1}}{2} D_i \frac{\delta}{\delta x} \mathcal{Y}_i$$

Sei  $g$  der Index der äußeren Grenzschrift des Absorbers so lautet die eintretende Energiestromdichte in Gruppenschreibweise

$$(1.60) \quad g_g^i = D^i \frac{\mathcal{Y}_g^i - \mathcal{Y}_{g+1}^i}{h} \frac{E^{i+1} + E^i}{2}$$

entsprechend mit  $v$  als Index des Außenrandes zum Vakuum

$$(1.61) \quad g_v^i = D^i \frac{\mathcal{Y}_{v-1}^i - \mathcal{Y}_v^i}{h} \frac{E^{i+1} + E^i}{2}$$

Durch die Differenzbildung sind dies die Stromdichten jeweils eine Streifenbreite im Gewebeinneren. Wegen des näherungsweise exponentiellen Verlaufes ist das Verhältnis

$$g_g / g_v$$

ungefähr proportional zur Dicke der Schicht. Mit  $n_G$  als Streifenzahl des Gewebes korrigieren wir näherungsweise

$$(1.62) \quad g_g' = g_g \frac{n_G}{n_G - 2}$$

Die Korrektur erfolgt einseitig, um mit dem Ergebnis auf der sicheren Seite zu bleiben.

Die Differenz der Energiestromdichten entspricht der flächenbezogenen Energieabsorption. Dabei soll, da wir uns in jedem Fall weitab vom Zentrum befinden, der Einfluß der gekrümmten Geometrie unberücksichtigt bleiben. Division dieses Wertes durch die Schichtdicke führt zum Bezug auf das Volumen und eine weitere durch die Dichte endlich auf die (massenbezogene) Dosisleistung

$$(1.63) \quad D_g^i = \frac{E^i + E^{i+1}}{2} \frac{D^i}{h \cdot h_G \cdot \rho_G} \left( \frac{(\mathcal{Y}_g^i - \mathcal{Y}_{g+1}^i) n_G}{n_G - 2} + (\mathcal{Y}_v^i - \mathcal{Y}_{v-1}^i) \right)$$