2. Numerische Berechnung der Gruppenkonstanten

2.1. Absorptionsquerschnitt Σ_A

Die Energien der betrachteten Photonen sind bei weitem zu gering für den Paarbildungseffekt, wir wollen daher ausschließlich den Photoeffekt betrachten. Es existiert eine empirische Formel für die Absorption an der K-Schale τ_K in [barn/Atom] in Abhängigkeit von der Ordnungszahl Z und der Energie E in[MeV]. /Ja 68,S.187/

(2.1) $$\tau_K \approx Z^5 \cdot \sum_{n=1}^{4} \frac{a_n + b_n \cdot Z}{1 + c_n \cdot Z} \cdot E^{-p_n}$$

mit folgenden Parametern

n	a_n	b_n	c_n	p_n
1	$1.6268*10^{-9}$	$-2.683*10^{-12}$	$4.173*10^{-2}$	1
2	$1.5274*10^{-9}$	$-0.511*10^{-12}$	$1.027*10^{-2}$	2
3	$1.1330*10^{-9}$	$-2.177*10^{-12}$	$2.013*10^{-2}$	3.5
4	$-.0912*10^{-9}$	0.0	0.0	4

Tabelle 2.1

Diese Formel ist recht genau für .2 MeV <E <100 MeV und 13 <Z <92. Der Fehler bei kleinen Atommassen fällt weniger ins Gewicht als der bei kleinen Energien, wo im Extremfall negative Querschnitte herauskommen. Da andererseits das Produkt $\tau_K * E^3$ für gegebenes Z um weniger als einen Faktor 3 variiert, nehmen wir für E <.1 MeV das tausendfache des Wertes für 10*E. Ferner geht die Formel von (unabhängig vom Material) jeweils zwei K-Elektronen aus; der Wert für Wasserstoff ist daher systematisch um den Faktor 2 zu groß.
Das Verhältnis σ_A/τ_K der Gesamtabsorption zu der an der K-Schale ist nahezu energieunabhängig. Es gilt empirisch

(2.2) $\sigma_A/\tau_K \approx 1 + 0.01481 \ln^2 Z - 0.000788 \ln^3 Z$

2.2. Streuübergangsquerschnitte Σ_{i-j}

Wir betrachten näherungsweise alle Elektronen als frei und berechnen den Streuquerschnitt freier Elektronen nach der *Klein-Nishina* Formel /Ja 68,S.189 ff/.

(2.3) $$\Sigma_S(E) = n_e\, \sigma_S^{KN}(E)$$

(2.4) $$\Sigma_S(E) = \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\underline{\Omega}'\, \Sigma_S(E \to E', \underline{\Omega} \to \underline{\Omega}')$$

n_e ist die Anzahldichte der Elektronen. E' und $\underline{\Omega}'$ sind dabei nicht unabhängig, sondern mit

$\cos\vartheta := \underline{\Omega}' * \underline{\Omega}$

als Cosinus des Streuwinkels gilt (*Compton-Debye*):

(2.5) $$\frac{E'}{E} = \left[1 + \frac{E}{m_e c^2} (1 - \cos\vartheta) \right]^{-1}$$

Mit

$\tilde{E} := m_e c^2 = 0.5110$ MeV

als Ruheenergie des Elektrons lösen wir (2.5) auf:

(2.6a) $$1-\cos\vartheta = \frac{\tilde{E}}{E}\left(\frac{E}{E'}-1\right) = \frac{\tilde{E}}{E} - \frac{\tilde{E}}{E}$$

(2.6b) $$\cos\vartheta = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}\left(\frac{E}{E'}-1\right) = 1 + \frac{\tilde{E}}{E} - \frac{\tilde{E}}{E'}$$

Die *Klein-Nishina* Formel für den differentiellen Streuquerschnitt lautet:

(2.7) $$\frac{d\sigma_s^{KN}(E,\cos\vartheta)}{\underline{d\Omega}} = \frac{1}{2} r_e^2 \, \frac{1+\cos^2\vartheta - \dfrac{\left(E/\tilde{E}\right)^2 (1-\cos\vartheta)^2}{1+E/\tilde{E}\,(1-\cos\vartheta)}}{\left[1+E/\tilde{E}\,(1-\cos\vartheta)\right]^2}$$

Dabei ist

r_e= 2.8179381*10^{-15}m^2

der klassische Elektronenradius. Mit (2.6a) und (2.6b) können wir die Variablen substituieren

$$d\sigma_s^{KN}(E,\cos\vartheta) \longrightarrow d\sigma_s^{KN}(E\rightarrow E')$$

und ferner

(2.8) $$d\sigma_s^{KN}(E\rightarrow E') = \frac{d\sigma_s^{KN}(E\rightarrow E')}{\underline{d\Omega}}\,\underline{d\Omega}$$

$$= 2\pi\,\frac{d\sigma_s^{KN}(E\rightarrow E')}{\underline{d\Omega}}\,\sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$= 2\pi\,\frac{d\sigma_s^{KN}(E\rightarrow E')}{\underline{d\Omega}}\,\sin\vartheta\,\frac{d\vartheta}{d(1-\cos\vartheta)}\;\frac{d(1-\cos\vartheta)}{dE'}\,dE'$$

dabei

(2.9) $$\sin\vartheta\,\frac{d\vartheta}{d(1-\cos\vartheta)} = 1$$

(2.10) $$\frac{d(1-\cos\vartheta)}{dE'} = \frac{-\tilde{E}}{E'^2} \longrightarrow \frac{\tilde{E}}{E'^2}$$

Der Vorzeichenwechsel erfolgt, da bei Integration über E' üblicherweise die Grenzen vertauscht werden.

(2.11) $$\frac{d\sigma_s^{N}(E\rightarrow E')}{\underline{d\Omega}} = \frac{1}{2} r_e^2 \, \frac{1+\left(1+\tilde{E}/E-\tilde{E}/E'\right)^2 \dfrac{\left(E/\tilde{E}\right)^2\left(\tilde{E}/E\right)^2\left(E/E'-1\right)^2}{1+E/\tilde{E}\;\tilde{E}/E\;\left(E/E'-1\right)}}{\left[1+E/\tilde{E}\;\tilde{E}/E\left(E/E'-1\right)\right]^2}$$

$$= \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{E'}{E}\right)^2 \left[\frac{E'}{E} + \left(\frac{2\tilde{E}}{E}+\frac{\tilde{E}^2}{E^2}\right) + \frac{1}{E'}\left(E-2\tilde{E}-2\frac{\tilde{E}^2}{E}\right) + \frac{\tilde{E}^2}{E'^2}\right]$$

Zusammen also:

$$\frac{d\sigma_s^{KN}(E \to E')}{dE'} = \pi r_e^2 \frac{\tilde{E}}{E^2}\left[\frac{E'}{E} + \left(\frac{2\tilde{E}}{E} + \frac{\tilde{E}^2}{E^2}\right) + \frac{1}{E'}\left(E - 2\tilde{E} - 2\frac{\tilde{E}^2}{E}\right) + \frac{\tilde{E}^2}{E'^2}\right] \tag{2.12}$$

Wegen $\cos\vartheta \in [-1,1]$ ist diese Gleichung nur richtig solange

$$E' \in \left[\frac{E\tilde{E}}{\tilde{E}+2E}, E\right]$$

(*Compton-Debye*), sonst gilt

$$\frac{d\sigma_s^{KN}(E \to E')}{dE'} = 0$$

Dies ist bei der Integration zu berücksichtigen. Nun gilt:

$$\Sigma_{i \to j} = n_e \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \, \frac{\Phi_i(E)}{\Delta E_i} \int_{E_j}^{E_{j+1}} dE' \, \frac{d\sigma_s^{KN}(E \to E')}{dE'} \tag{2.13}$$

Dieses Integral ist zu lösen. Es gilt stets $E_{j+1} \leq E_i$. Die Bedingung

$$E' \geq E\tilde{E} / (\tilde{E} + 2E)$$

ist zu überprüfen und die Integrationsgrenze E_j entsprechend anzupassen. Wir betrachten zunächst:

$$\sigma(E \to j) := \int_{E_j}^{E_{j+1}} dE' \, \frac{d\sigma_s^{KN}(E \to E')}{dE'} \tag{2.14}$$

und erhalten drei Fälle:

i) für $E_{j+1} \leq E\tilde{E} / (\tilde{E} + 2E)$

$$\sigma(E \to j) = 0 \tag{2.15}$$

ii) für $E_j < E\tilde{E} / (\tilde{E} + 2E) < E_{j+1}$

$$\begin{aligned}\sigma(E \to j) = \pi r_e^2 \Bigg[& \ln\left(\frac{E_{j+1}(\tilde{E}+2E)}{E\tilde{E}}\right)\left(\frac{\tilde{E}}{E} - 2\left(\frac{\tilde{E}}{E}\right)^2 - 2\left(\frac{\tilde{E}}{E}\right)^3\right) + \frac{1}{E^2}\left(2\tilde{E}^2 - \frac{\tilde{E}^3}{E_{j+1}}\right) + \\ & + \frac{1}{E^3}\left(\frac{E_{j+1}^2 \tilde{E}}{2} + 2\tilde{E}^2 E_{j+1}\right) + \frac{1}{E^4}\tilde{E}^3 E_{j+1} - \frac{\tilde{E}^3}{2E}(\tilde{E}+2E)^{-2}\Bigg]\end{aligned} \tag{2.16}$$

iii) für $E\tilde{E} / (\tilde{E} + 2E) \leq E_j$

$$\begin{aligned}\sigma(E \to j) = \pi r_e^2 \tilde{E} \Bigg[& \frac{1}{E} \ln\frac{E_{j+1}}{E_j} + \frac{1}{E^2}\left(-2\tilde{E}\ln\frac{E_{j+1}}{E_j} + \frac{\tilde{E}^2}{E_j} - \frac{\tilde{E}^2}{E_{j+1}}\right) + \\ & + \frac{1}{E^3}\left(\frac{E_{j+1}^2 - E_j^2}{2} + 2\tilde{E}(E_{j+1} - E_j) - 2\tilde{E}^2 \ln\frac{E_{j+1}}{E_j}\right) + \frac{1}{E^4}\tilde{E}^2(E_{j+1} - E_j)\Bigg]\end{aligned} \tag{2.17}$$

In der zweiten Integration taucht die Formfunktion $\Phi_i(E)$ auf. Über die Form des spektralen Flusses ist nichts bekannt, außer daß er voraussichtlich stark ortsabhängig ist. Wir wollen daher hier die nullte Näherung einsetzen: $\Phi_i(E) \approx 1$. Es sind wieder Fälle zu unterscheiden:

(2.18) $$\sigma(i \to j) := \int_{E_i}^{E_{i+1}} dE \, \frac{\Phi_i(E)}{\Delta E_i} \, \sigma(E \to j)$$

i) $E_m := \tilde{E}E_{j+1}/(\tilde{E}-2E_{j+1}) \leq E_i$

$\sigma(i \to j) = \emptyset$

ii) $E_g := \tilde{E}E_j/(\tilde{E}-2E_j) \leq E_{i+1}$

Es wird integriert von E_i bis E_{i+1} mit $\sigma(E \to j)$ gemäß Formel (2.17)

iii) $E_{i+1} > E_m$

$E_B = \min\{E_{i+1}, E_m\}$ wird zur oberen Integrationsgrenze

iv) $E_i \geq E_g$

Es wird integriert von E_i bis E_B mit $\sigma(E \to j)$ gemäß Formel (2.16)

v) $E_i < E_g < E_B$

Es wird integriert von E_i bis E_g unter Verwendung von (2.17) und von E_g bis E_B unter Verwendung von (2.16)

Das Integral ist also für beide Fälle mit allgemeinen Grenzen anzugeben. Zugunsten besserer Übersichtlichkeit setzen wir

$U := E_j \quad ; \quad O := E_{j+1}$

Mit (2.17) erhalten wir:

(2.19) $$\int_A^B dE \frac{1}{\Delta E_i} \sigma(E \to j)$$

$$= \frac{\pi r_e^2 \tilde{E}}{\Delta E_i} \Big[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{A^3} - \frac{1}{B^3}\right) \tilde{E}^2 (O-U) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2}\right)\left(\frac{O^2-U^2}{2} + 2\tilde{E}(O-U) - 2\tilde{E}^2 \ln\frac{O}{U}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\left(-2\tilde{E}\ln\frac{O}{U} + \frac{\tilde{E}^2}{U} - \frac{\tilde{E}^2}{O}\right) + \left(\ln\frac{O}{U}\right)\left(\ln\frac{B}{A}\right)\Big]$$

Desgleichen mit (2.16)

$$\int_A^B dE\ (\Delta E_i)^{-1}\,\sigma\,(E\rightarrow j) \tag{2.20}$$

$$= \frac{\pi r_e^2}{\Delta E_i}\left[\frac{\tilde{E}^3 O}{3}\left(\frac{1}{A^3}-\frac{1}{B^3}\right)+\left(\frac{\tilde{E}O^2}{4}+\tilde{E}^2 O\right)\left(\frac{1}{A^2}-\frac{1}{B^2}\right)+\right.$$

$$+\left(2\tilde{E}^2-\frac{\tilde{E}^3}{O}\right)\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)-\frac{\tilde{E}^3}{2}\int_A^B\frac{dE}{E(\tilde{E}+2E)^2}\ +$$

$$\left.+\int_A^B dE\ \left(\frac{\tilde{E}}{E}-2\frac{\tilde{E}^2}{E^2}-2\frac{\tilde{E}^3}{E^3}\right)\ln\ \frac{O(\tilde{E}+2E)}{\tilde{E}E}\right]$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{E(\tilde{E}+2E)^2}=\frac{1}{4E\left(\frac{\tilde{E}}{2}+E\right)^2} \tag{2.21a}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4/\tilde{E}^2}{E}+\frac{-4/\tilde{E}^2}{\tilde{E}/2+E}+\frac{-2/\tilde{E}}{(\tilde{E}/2+E)^2}\right)$$

$$\frac{-\tilde{E}^3}{2}\int_A^B\frac{dE}{E(\tilde{E}+2E)^2}= \tag{2.21b}$$

$$=\frac{\tilde{E}^2}{2}\left(\frac{1}{\tilde{E}+2A}-\frac{1}{\tilde{E}+2B}\right)+\frac{\tilde{E}}{2}\left(\ln\frac{\tilde{E}+2B}{\tilde{E}+2A}-\ln\frac{B}{A}\right)$$

$$\int_A^B dE\left(\frac{\tilde{E}}{E}-2\frac{\tilde{E}^2}{E^2}-2\frac{\tilde{E}^3}{E^3}\right)\ln\ \frac{O(\tilde{E}+2E)}{\tilde{E}E}= \tag{2.22}$$

$$=\left[\ln\left(\frac{O}{E}+\frac{2O}{\tilde{E}}\right)\left(\tilde{E}\ln\frac{E}{\tilde{E}}+\frac{2\tilde{E}^2}{E}+\frac{\tilde{E}^3}{E^2}\right)\right]_A^B-$$

$$-\int_A^B dE\ \left(\tilde{E}\ln\frac{E}{\tilde{E}}+\frac{2\tilde{E}^2}{E}+\frac{\tilde{E}}{E^2}\right)\frac{-\tilde{E}}{E(\tilde{E}+2E)}$$

(2.23a)
$$-\int_A^B dE \, \frac{\tilde{E}^3}{E^2} \, \frac{-\tilde{E}}{E(\tilde{E}+2E)} =$$

$$= \tilde{E}^4 \int_A^B \frac{dE}{E^3(\tilde{E}+2E)}$$

$$= \tilde{E}^4 \left[\frac{-1}{\tilde{E}^3} \left(4 \ln \frac{\tilde{E}+2E}{E} - \frac{4\tilde{E}+2E}{E} + \frac{(\tilde{E}+2E)^2}{2E^2} \right) \right]_A^B$$

$$= -4\tilde{E} \left(\ln \frac{\tilde{E}+2B}{\tilde{E}+2A} - \ln \frac{B}{A} \right) - 4\tilde{E}^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) +$$

$$+ \frac{\tilde{E}}{2} \left(\left(\frac{\tilde{E}}{A} + 2 \right)^2 - \left(\frac{\tilde{E}}{B} + 2 \right)^2 \right)$$

$$= \frac{\tilde{E}^3}{2} \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} \right) - 2\tilde{E}^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) -$$

$$- 4\tilde{E} \left(\ln \frac{\tilde{E}+2B}{\tilde{E}+2A} - \ln \frac{B}{A} \right)$$

(2.23b)
$$-\int_A^B dE \, \frac{2\tilde{E}^2}{E} \, \frac{-\tilde{E}}{E(\tilde{E}+2E)}$$

$$= 2\tilde{E}^3 \int_A^B \frac{dE}{E^2(\tilde{E}+2E)}$$

$$= 2\tilde{E}^3 \left[\frac{-1}{E\tilde{E}} + \frac{2}{\tilde{E}^2} \ln \frac{\tilde{E}+2E}{E} \right]_A^B$$

$$= 2\tilde{E}^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + 4\tilde{E} \left(\ln \frac{\tilde{E}+2B}{\tilde{E}+2A} - \ln \frac{B}{A} \right)$$

(2.23c)
$$-\int_A^B dE \, \tilde{E} \left(\ln \frac{E}{\tilde{E}} \right) \frac{-\tilde{E}}{E(\tilde{E}+2E)}$$

$$= \int_A^B dE \, \left(\ln \frac{E}{\tilde{E}} \right) \frac{\tilde{E}^2}{E(\tilde{E}+2E)}$$

$$= \int_A^B dE \, \frac{\ln (E/\tilde{E})}{E/\tilde{E} \, (1 + 2\, E/\tilde{E})}$$

Substitution:

$k = E/\tilde{E}$; $E = \tilde{E}*k$; $dE = \tilde{E}*dk$; $k > 0$

(2.24) $$\tilde{E}\int dk \frac{\ln k}{k(1+2k)}$$

$$= \tilde{E}\int dk \frac{\ln k}{k} - \tilde{E}\int dk \frac{2\ln k}{(1+2k)}$$

(2.25a) $$\tilde{E}\int dk \frac{\ln k}{k} = \tilde{E}\left[\frac{1}{2}\ln^2 k\right]$$

$$= \frac{\tilde{E}}{2}\left(\left(\ln\frac{B}{\tilde{E}}\right)^2 - \left(\ln\frac{A}{\tilde{E}}\right)^2\right)$$

sei: $y = 2k+1$; $k = ½(y-1)$; $dk = ½dy$; $y > 1$

(2.25b) $$-\tilde{E}\int dx \frac{2\ln x}{1+2x}$$

$$= -\tilde{E}\int \frac{dy}{y} \ln\frac{y-1}{2}$$

$$= -\tilde{E}\int \frac{dy}{y} \ln\left(\frac{1}{2}\cdot y\cdot\left(1-\frac{1}{y}\right)\right)$$

$$= \tilde{E}\ln 2\int\frac{dy}{y} - \tilde{E}\int\frac{dy}{y}\ln y - \tilde{E}\int\frac{dy}{y}\ln\left(1-\frac{1}{y}\right)$$

(2.26a) $$\tilde{E}\ln 2\int\frac{dy}{y} = \tilde{E}\ln 2\left[\ln y\right]$$

$$= \tilde{E}\ (\ln 2)\left(\ln\frac{2B+\tilde{E}}{2A+\tilde{E}}\right)$$

(2.26b) $$-\tilde{E}\int\frac{dy}{y}\ln y = -\tilde{E}\left[\frac{1}{2}\ln^2 y\right]$$

$$= \frac{-\tilde{E}}{2}\left(\left(\ln\frac{2B+\tilde{E}}{\tilde{E}}\right)^2 - \left(\ln\frac{2A+\tilde{E}}{\tilde{E}}\right)^2\right)$$

(2.26c)

$$
\begin{aligned}
& -\tilde{E} \int \frac{dy}{y} \, \ln \left(1 - \frac{1}{y} \right) \\
&= -\tilde{E} \int \frac{-dy}{y} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{y} \right)^{\nu} \\
&= \tilde{E} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int dy \; y^{-\nu-1} \\
&= \tilde{E} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{-1}{\nu^2} \left(\frac{1}{y} \right)^{\nu} \\
&\simeq -\tilde{E} \sum_{\nu=1}^{25} \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{1}{y} \right)^{\nu} \\
&= \tilde{E} \sum_{\nu=1}^{25} \frac{1}{\nu^2} \left[\left(\frac{\tilde{E}}{2A+\tilde{E}} \right)^{\nu} - \left(\frac{\tilde{E}}{2B+\tilde{E}} \right)^{\nu} \right]
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in (2.20) und sortiert:

(2.27)

$$
\begin{aligned}
\int_A^B dE \, \frac{\sigma(E \to j)}{\Delta E_i} &= \pi r_e^2 \frac{\tilde{E}}{\Delta E_i} \cdot \\
\cdot \Bigg[& \left(\frac{1}{A^3} - \frac{1}{B^3} \right) \frac{\tilde{E}^2 O}{3} + \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} \right) \left(\frac{\tilde{E}^2}{2} + \tilde{E} O + \frac{O^2}{4} \right) + \\
&+ \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \left(2\tilde{E} - \frac{\tilde{E}^2}{O} \right) + \frac{\tilde{E}}{2} \left(\frac{1}{2A+\tilde{E}} - \frac{1}{2B+\tilde{E}} \right) + \\
&+ \left(\ln \frac{B}{\tilde{E}} + \frac{2\tilde{E}}{B} + \frac{\tilde{E}^2}{B^2} \right) \ln \left(\frac{O}{B} + \frac{2O}{\tilde{E}} \right) - \\
&- \left(\ln \frac{A}{\tilde{E}} + \frac{2\tilde{E}}{A} + \frac{\tilde{E}^2}{A^2} \right) \ln \left(\frac{O}{A} + \frac{2O}{\tilde{E}} \right) + \\
&+ \left(\frac{1}{2} + \ln 2 \right) \left(\ln \frac{2B+\tilde{E}}{2A+\tilde{E}} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{B}{A} + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\left(\ln \frac{B}{\tilde{E}} \right)^2 - \left(\ln \frac{A}{\tilde{E}} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[\left(\ln \frac{2B+\tilde{E}}{\tilde{E}} \right)^2 - \left(\ln \frac{2A+\tilde{E}}{\tilde{E}} \right)^2 \right] + \\
&+ \sum_{\nu=1}^{25} \frac{1}{\nu^2} \left[\left(\frac{\tilde{E}}{2A+\tilde{E}} \right)^{\nu} - \left(\frac{\tilde{E}}{2B+\tilde{E}} \right)^{\nu} \right] \Bigg]
\end{aligned}
$$

2.3. Diffusionskoeffizient D

Mit der Definition (1.28) gilt (vgl.(1.12),(2.8))

$$\mathcal{D}(E) = \left[3\left(\Sigma_a(E) + \int_0^E dE' \left(\Sigma_0^s(E \to E') - \Sigma_1^s(E \to E')\right)\right)\right]^{-1} \tag{2.28}$$

$$\sigma_0^s(E) := \frac{1}{n_\ell}\Sigma_0^s(E) := \frac{1}{n_\ell}\int_0^E dE' \, \Sigma_0^s(E \to E') \tag{2.29}$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} d\mu \; \sigma_s^{kN}(E,\mu)$$

$$= \pi r_e^2 \int_{-1}^{1} d\mu \; \frac{(1+\mu^2)(1+k(1-\mu)) + k^2(1-\mu)^2}{(1+k(1-\mu))^3}$$

Dabei weiter $k := E/\tilde{E}$
Umformung des Integranden:

$x := \mu$; $a := k$; $b := (1+k)$; $y := (b-ax)$

$$\sigma_0^s(E) = \pi r_e^2 \int_{-1}^{1} dx \left(\frac{x^2 - ax + a}{y^2} + \frac{1}{y^3}\right) \tag{2.30}$$

Entsprechend: (vgl.(1.12))

$$\sigma_1^s(E) = 2\pi \int_{-1}^{1} d\mu \, \mu \; \sigma_s^{kN}(E,\mu) \tag{2.31}$$

$$= \pi r_e^2 \int_{-1}^{1} dx \left(\frac{x^3 - ax^2 + ax}{y^2} + \frac{x}{y^3}\right)$$

ergo:

$$\left(\sigma_0^s - \sigma_1^s\right)(E) = \pi r_e^2 \int_{-1}^{1} dx \left(\frac{-x^3 + (1+a)x^2 - 2ax + a}{y^2} + \frac{1-x}{y^3}\right) \tag{2.32}$$

$$= \pi r_e^2 \int_{-1}^{1} dx \left(\frac{-x^3 + (1+a)x^2 - 2ax + \frac{a^2+1}{a}}{y^2} + \frac{1 - b/a}{y^3}\right)$$

Wir verwenden die folgenden Integrale:

$$-1 \cdot \int_{-1}^{1} \frac{dx\, x^3}{y^2} = (-1)\frac{1}{(-a)^4}\left[\frac{y^2}{2} - 3by + 3b^2 \ln y + \frac{b^3}{y}\right]_{-1}^{1} \tag{2.33a}$$

$$(1+a)\int_{-1}^{1}\frac{dx\,x^2}{y^2} = \frac{1+a}{(-a)^3}\left[y-2b\ln y-\frac{b^2}{y}\right]_{-1}^{1} \tag{2.33b}$$

$$-2a\int_{-1}^{1}\frac{dx\,x}{y^2} = \frac{-2a}{(-a)^2}\left[\ln y+\frac{b}{y}\right]_{-1}^{1} \tag{2.33c}$$

$$\frac{a^2+1}{a}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{y^2} = \frac{a^2+1}{a(-a)}\left[\frac{-1}{y}\right]_{-1}^{1} \tag{2.33d}$$

$$\left(1-\frac{b}{a}\right)\int_{-1}^{1}\frac{dx}{y^3} = \frac{1-b/a}{2a}\left[\frac{1}{y^2}\right]_{-1}^{1} \tag{2.33e}$$

Sortiert nach Potenzen von y:

$$\left[y^2\right]_{-1}^{1}\cdot\left(\frac{-1}{2a^4}\right) \tag{2.34a}$$

$$\left[y\right]_{-1}^{1}\cdot\left(\frac{1+a}{-a^3}+\frac{3b}{a^4}\right) \tag{2.34b}$$

$$\left[\frac{1}{y}\right]_{-1}^{1}\cdot\left(\frac{-b^3}{a^4}+\frac{-(1+a)b^2}{-a^3}+\frac{-2ab}{a^2}+\frac{(-1)(a^2+1)}{a(-a)}\right) \tag{2.34c}$$

$$\left[\frac{1}{y^2}\right]_{-1}^{1}\cdot\left(\frac{1-b/a}{2a}\right) \tag{2.34d}$$

$$\left[\ln y\right]_{-1}^{1}\cdot\left(\frac{-3b^2}{a^4}+\frac{(-2b)(1+a)}{-a^3}+\frac{-2a}{a^2}\right) \tag{2.34e}$$

Alle Substitutionen rückeingesetzt und sortiert finden wir endlich:

$$(\sigma_0-\sigma_1)(E) = \pi r_e^2\left(\frac{2k^2-2k-6}{k^3}+\frac{2}{(2k+1)^2}+\frac{-k^2+4k+3}{k^4}\ln(2k+1)\right) \tag{2.35}$$